Licence des Sciences de la Vie et de la Terre
UE Outils mathématiques pour les sciences de la mer - L2

TD1 - Révisions de calcul et manipulations algébriques

Exercice 1 : Quels sont les différents types de nombres réels que vous connaissez ? Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ? Les nombres réels sont-ils tous rationnels (justifier) ?

Exercice 2 : Comment peut-on définir a^n où a est un nombre réel et n est un nombre entier naturel ?

Comment peut-on définir a^{-n} où a est un nombre réel non nul et n est un nombre entier naturel ?

Comment peut-on définir $a^{1/p}$ où a est un nombre réel positif et p est un nombre entier naturel ? Pourquoi préciser que a est positif ?

Comment peut-on définir a^r où a est un nombre réel positif et r est un nombre rationnel positif ?

Même question avec $r < 0$ et $a \neq 0$.

Comment peut-on définir a^b où a est un nombre réel positif et b est un nombre réel irrationnel ?

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

3.1) $\dfrac{ax}{b+x} = c$ où a, b et c sont des paramètres réels.

3.2) $\dfrac{15x^3 - 2x^4}{x^2} = x^3$

3.3) $x^4 + x^2 - 12 = 0$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

4.1) $\dfrac{2x}{1+x} < 3$

4.2) $\dfrac{15x^3 - 2x^4}{x^2} \geq x^3$

4.3) $x^2 + x - 12 < 0$

4.4) $x^r > 2$ où r est un nombre réel positif.

Exercice 5 : A quelle(s) condition(s) sur les paramètres réels a, b et c, l'expression suivante est-elle toujours positive lorsque $x \in \mathbb{R}$?

$$ax^2 + bx + c$$

Exercice 6 (*) : Montrer que :

6.1) $\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + xy + y^2$

6.2) $\frac{x^n-y^n}{x-y} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1}$

Exercice 7 : Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont réels.

a) $z = (2+3i)(1+5i)$

b) $z = (1-2i)(3+2i)$

c) $z = \dfrac{1+i}{1-2i}$

d) $z = \dfrac{(1-i)^2}{3+i}$

Exercice 8 : Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a) $z = 1 + 3i$

b) $z = 2 - 5i$

c) $z = \dfrac{2+2i}{1-i}$

Exercice 9 : Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $z = \rho \exp(i\theta)$ où ρ et θ désignent le module et l'argument de z respectivement.

a) $z = 5 - i$

b) $z = \dfrac{1-i}{2+3i}$

Exercice 10 Soit $z = 2 + 4i$, quelle est la partie réelle de $\exp(z)$? Quelle est sa partie imaginaire ?

Soit $z_1 = \rho_1 \exp(i\theta_1)$ et $z_2 = \rho_2 \exp(i\theta_2)$. On pose $z = z_1 z_2$. Exprimer z sous la forme $z = \rho \exp(i\theta)$ puis sous la forme $z = x + iy$.

Exercice 11 Résoudre les deux équations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 10 = 0$

Exercice 12 (**) : Montrer par récurrence que :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Exercice 13 : Tracer dans un repère orthonormé (O, I, J) le cercle de rayon 1 et positionner un point M sur le cercle. On note α l'angle entre l'axe horizontal et la droite (OM). Comment appelle-t-on l'abscisse de M ? Et son ordonnée ? Que peut-on dire de $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$? Indiquer sur le graphe où visualiser le nombre $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Exercice 14 : On considère deux points M et N de coordonnées $(1, 3)$ et $(4, -1)$ respectivement, dans le repère orthonormé (O, I, J). Calculer la distance MN. Caculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$. Déterminer l'équation de la droite passant pas les points M et N.