Licence des Sciences de la Vie et de la Terre
Parcours MER
Unité d'Enseignement "Outils Mathématiques pour les Sciences de la mer"

TD 3 – Diagonalisation - Mise sous forme de Jordan

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 : On considère les deux vecteurs $u = {}^T(1,3)$ et $v = {}^T(2,-4)$. Tracer les deux vecteurs dans le plan muni d'un repère (O,i,j). Quelle est la surface du parallélogramme porté pas u et v ?

Exercice 3 : On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
2) Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre. Conclure.

Exercice 4 : Même exercice avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Pour chacune des deux matrices suivantes, répondre aux deux questions ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 26 & -8 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
2) Déterminer les vecteurs propres associés à chaque valeur propre. Conclure.

Exercice 6 : Soit A une matrice $n \times n$ (c'est - à - dire avec n lignes et n colonnes). On note a_{ij} le coefficient de A situé sur la ligne i et la colonne j. On suppose que A est diagonalisable et on note D la matrice diagonale correspondante. L'objectif de cet exercice est de montrer que la trace de A est égale à la trace de D, où la trace d'une matrice désigne la somme des termes sur sa diagonale.

1) Notons P la matrice de passage vers la base des vecteurs propres permettant de diagonaliser A. Exprimer A en fonction de D et P.

2) Exprimer le coefficient de la ligne i et de la colonne j de PD en fonction des coefficients de P et des valeurs propres.

3) Exprimer a_{ij} en fonction des coefficients de P , P^{-1} et des valeurs propres.

4) Montrer que la trace de A est égale à la trace de D.