(1) Licence SVT - 2ème année - Outils mathématiques

TD 3 - Diagonalisation. Matrice de Jordan

Exercice 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 - 6 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$- 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Donc l'application de la définition vue en cours conduit à devoir calculer 4 déterminants 3×3 pour un déterminant 4×4. Les calculs sont simplifiés si la première colonne contient des 0.

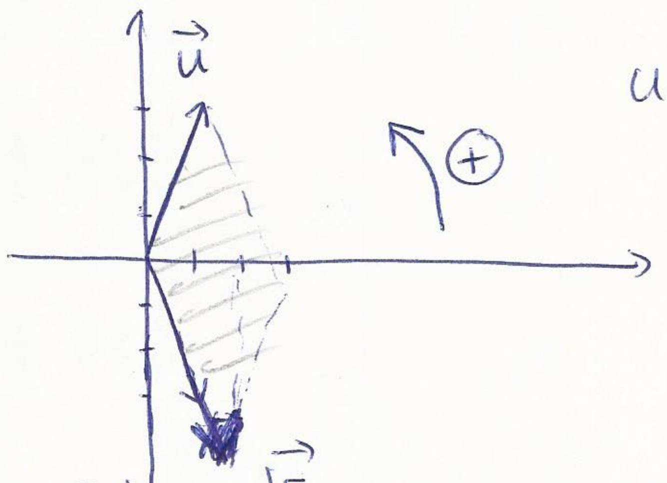
Avec les propriétés vues en cours, le calcul se simplifie. Notons que la 3ème ligne est le double de la première dans cet exemple.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{transposition}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1 \leftrightarrow C_3 \, (-1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

<u>Exercice 2:</u>



$u : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v : \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -4 - 6 = \underline{-10}$

La surface du ~~para~~ parallélogramme est 10. On passe de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ en tournant dans le sens $\ominus$, donc le $\det(A) < 0$.

Exercice 3 :

1) Valeurs propres de A : ce sont les solutions de dét $(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & 10 \\ -5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Les valeurs propres sont distinctes, donc A est diagonalisable.

2) Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 2$. $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$AV_1 = \lambda_1 V_1 = 2V_1$

$$\begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 10y = 2x \\ -5x + 7y = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 10y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = -3$: $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$AV_2 = \lambda_2 V_2 = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -8x + 10y = -3x \\ -5x + 7y = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 10y = 0 \\ -5x + 10y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -x + 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2y \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage vers la base des vecteurs propres est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, A devient :

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 4 :</u>

Les valeurs propres de A sont les solutions de $\det(A - \lambda I)$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 \to C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{transpose}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftrightarrow C_1}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & -2 & -1 \end{vmatrix} = -(2-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 2-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +(2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3$$

Les valeurs propres sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Il y a une valeur propre double (multiple), on ne peut <u>pas encore</u> conclure si A est diagonalisable

2) Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 2$ $\qquad V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AV_1 = \lambda_1 V_1$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2x \\ 2x + 4y - 2z = 2y \\ 2x + 2y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff z = x + y$$

⑥

Pour diagonaliser A, il faut une base de vecteurs propres (et c'est suffisant). On va donc essayer de trouver 2 vecteurs propres libres pour la valeur propre $\lambda = 2$. Par exemple :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont libres}$$

et sont 2 vecteurs propres associés à $\lambda = 2$.

Vecteurs propre associés à $\lambda_3 = 3$ $\quad V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3x \\ 2x + 4y - 2z = 3y \\ 2x + 2y = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ 2x - y = 0 \\ 2x \cancel{- y} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ y = 2x \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage permettant de passer dans la base des vecteurs propres est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, A devient :

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -10 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

et $\bar{\lambda} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$

Elles sont complexes, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2) Les vecteurs propres associés à λ sont :

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad AV = \lambda V$

$$\begin{cases} 7x - 10y = (1+2i)x \\ 4x - 5y = (1+2i)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-2i)x - 10y = 0 \\ 4x - (6+2i)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3-i}{5}x \\ 2x = \dfrac{(3+i)(3-i)}{5}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3-i}{5}x \\ 2x = \dfrac{10}{5}x \end{cases} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$$

Donc $\bar{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix}$

On définit la base de Jordan $(V_1 ; V_2)$ par :

$V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice de passag

$P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Dans cette base, A devient :

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : 1° $A = PDP^{-1}$

2° On note $C = PD$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} d_{kj}$$

$$d_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \lambda_j & \text{si } k = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_{ij} = p_{ij} d_{jj} = p_{ij} \lambda_j$$

3° $A = CP^{-1}$ On note $\overline{p}_{ij}$ les coefficients de P^{-1} !

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \overline{p}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \lambda_k \overline{p}_{kj}$$

4° $$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \lambda_k \overline{p}_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ik} \overline{p}_{ki} \right)}_{=1} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{Tr}(D)$$