Licence SVT - 2ème année - Outils mathématiques (1)

TD 4 - FONCTIONS REELLES

Exercice 1 : $\dfrac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \dfrac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$

$$= x^2 + x x_0 + x_0^2 \xrightarrow[x \to x_0]{} 3x_0^2$$

Donc la fonction f définie par $f(x) = x^3$ admet $f'(x) = 3x^2$ comme dérivée.

Exercice 2 :

1) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 12x^2 - 12x + 2$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5}{x^2 + 3x - 4}$. f n'est pas définie lorsque le dénominateur s'annule.

$x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad \Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$x_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ sont les deux racines du dénominateur. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 3x - 4) - (x^3 - 5)(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 4)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x + 15}{(x^2 + 3x - 4)^2}}$$

3) $f(x) = (4x^2 - 3x + 1)^3$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\boxed{f'(x) = 3(4x^2 - 3x + 1)^2(8x - 3)}$

4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7} = (3x^2 + 5x + 7)^{1/2}$

f n'est définie que si $3x^2 + 5x + 7 > 0$.

Cherchons les racines de ce trinôme :

$\Delta = 25 - 12 \times 7 < 0$ donc il n'admet pas de racine. Le trinôme est donc de signe constant, il est toujours positif.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 5x + 7)^{-1/2}(6x + 5)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 7}}}$$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$ f n'est définie que si

le trinôme $x^2 + 3x - 4$ est strictement positif.

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$\Rightarrow$ il s'annule en $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$. (voir exercice 2, fonction du 2) pour le détail des calculs si besoin).

Donc le trinôme est strictement positif à l'extérieur des racins.

$\mathcal{D}_f =]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$.

$f(x) = (x^2 + 3x - 4)^{-1/2}$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4)^{-\frac{3}{2}}(2x + 3)$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x+3}{2\left(\sqrt{x^2+3x-4}\right)^3}}$$

6) $f(x) = e^{(x-1)^2}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$$\boxed{f'(x) = 2(x-1)e^{(x-1)^2}}$$

7) $f(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

La fonction f n'est définie que si l'argument du logarithme, $\frac{2x+3}{x-1}$ est strictement positif.

Etude du signe de $\frac{2x+3}{x-1}$

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\infty\,; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]1\,; +\infty\right[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}}{\frac{2x+3}{x-1}} = \frac{(2x-2-2x-3)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{5}{(x-1)(2x+3)}}$$

Exercice 3:

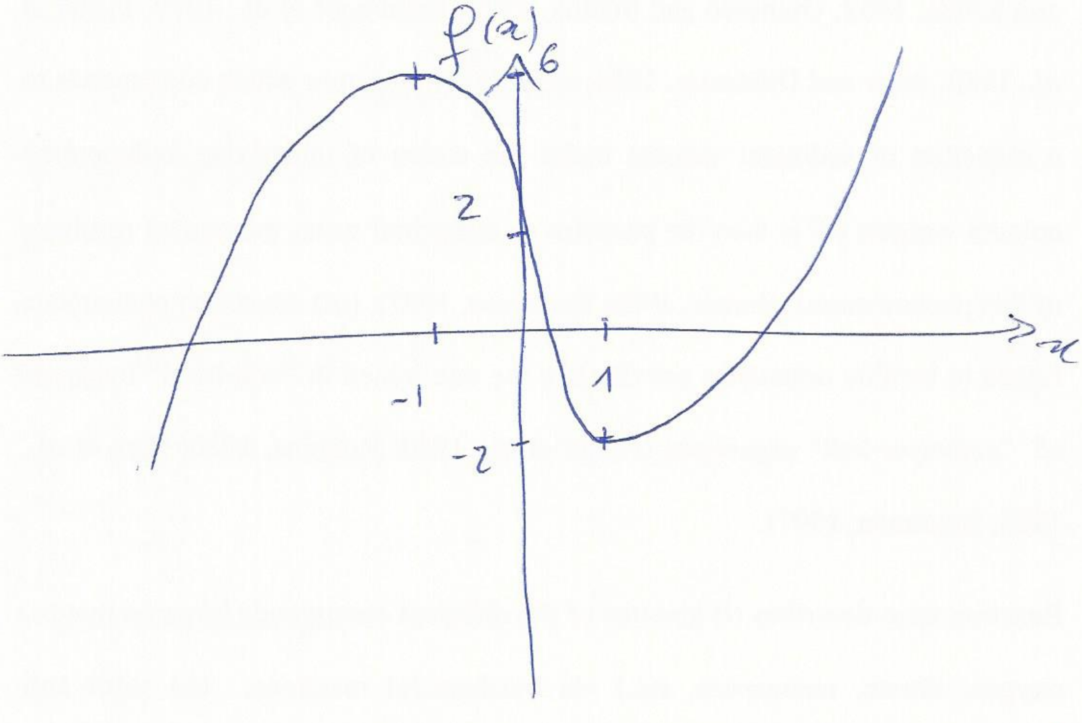
1) Etude de f définie par $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$

~~$f'(x)$~~ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2-1) = 6(x-1)(x+1)$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$



2) Etude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{5x^2+4x-1}$

f n'est pas définie aux racines du trinôme $5x^2+4x-1$.

$\Delta = 16 + 20 = 36$ $\qquad x_1 = \dfrac{-4+6}{10} = \dfrac{1}{5}$

$x_2 = \dfrac{-4-6}{10} = -1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1/5\}$.

$$f'(x) = \frac{(5x^2+4x-1) - (10x+4)(x+1)}{(5x^2+4x-1)^2}$$

$$= \frac{5x^2+4x-1-10x^2-14x-4}{(5x^2+4x-1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2-10x-5}{(5x^2+4x-1)^2}$$

$$= \frac{-5(x^2+2x+1)}{(5x^2+4x-1)^2} = \frac{-5(x+1)^2}{(5x^2+4x-1)^2} < 0$$

Donc f est décroissante.

x	$-\infty$		-1		$1/5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘		$-\frac{1}{6}$ ‖ $-\frac{1}{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

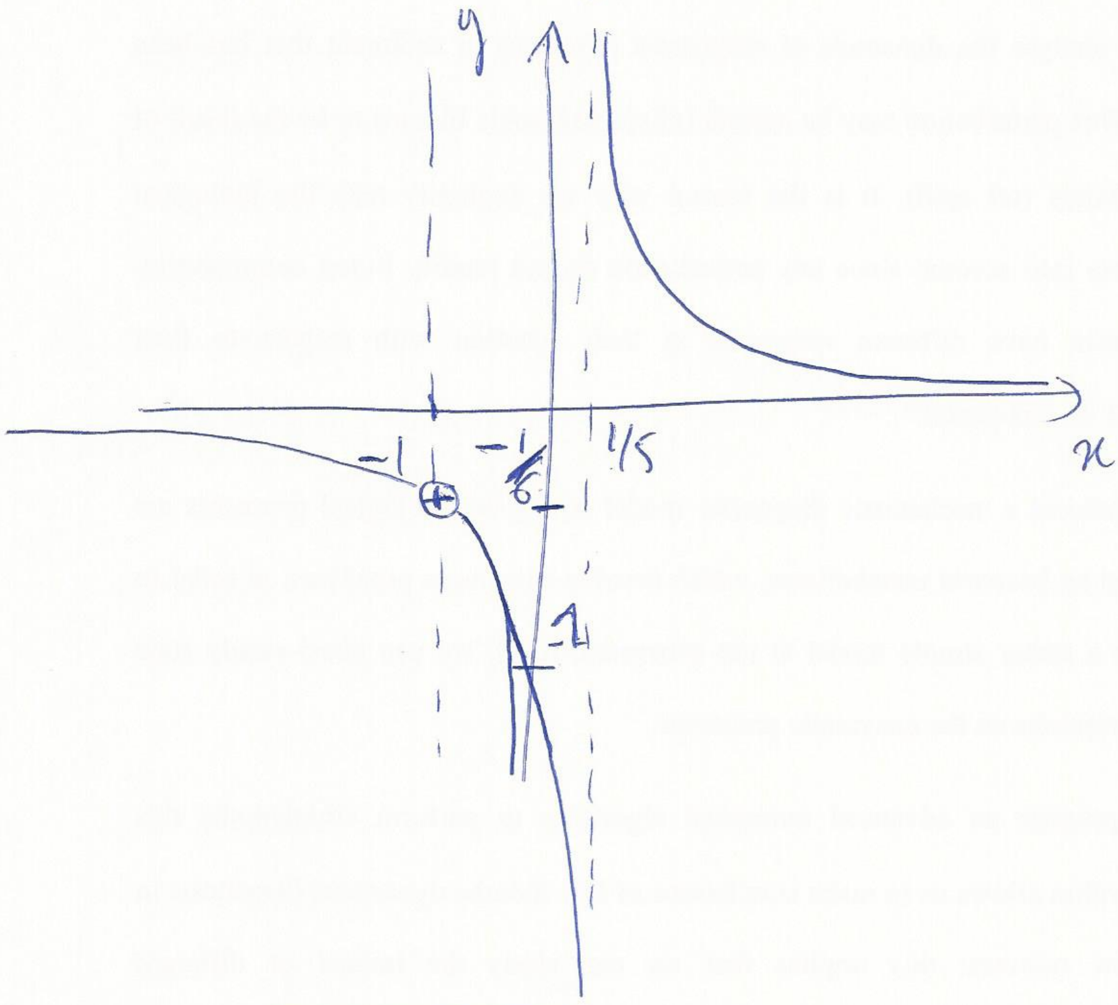
Pour la limite de f quand x tend vers 1, on peut utiliser la propriété du trinôme :

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines si elles existent dans $\mathbb{R}$.

⑦

On a donc : $5x^2+4x-1 = 5(x+1)(x-1/5)$

Donc $f(x) = \dfrac{x+1}{5(x+1)(x-1/5)} \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{1}{5(-1-1/5)} = -\dfrac{1}{6}$



Exercice 4 :

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\qquad x_0 = 0$ et $n = 3$.

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ + reste.

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad f'''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$

$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 2 \qquad f'''(0) = 6$

Donc : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \underline{\text{reste}}$

2) $f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f'''(0) = 2$

$\Rightarrow f(x) = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underline{\text{reste}}.$

3) $f(x) = e^x$ $\qquad f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout n

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$\Rightarrow f(x) = e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \underline{\text{reste}}.$

Exercice 5 :

1) $g(x) = x - 1 - \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < +1$
$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x} > 0$

Donc g est strictement croissante.

$g(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$ donc : $g(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

2) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

donc f' est du signe de g.

Donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 1$.
f est croissante sur $]1 ; +\infty[$.

3) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1} = \dfrac{(1+u)\ln(1+u)}{u}$

Comme $\ln(1+u) = u +$ reste (si $u \simeq 0$, voir exercice 4, fonction 2).

il en découle : $f(x) \simeq \dfrac{(1+u)u}{u} = 1+u \xrightarrow[u \to 0]{} 1$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 1$

4) Par conséquent $f(x) > 1$ pour tout $x > 1$.

Exercice 6 :

1) $\int f(x)\,dx = \int \ln x \,dx = x\ln x - x + C$ (voir cours).

3) $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) + C$

4) $\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{1+x}\,dx = \int \frac{x+1-1}{1+x}\,dx$

$= \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \int 1 \,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx$

$= x - \ln(1+x) + C$

Autre méthode :

I.P.P : On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x}$

donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x)$

La formule d'IPP donne :

$\int f(x)\,dx = x\ln(1+x) - \int \ln(1+x)\,dx$

Il faut calculer $\int \ln(1+x)\,dx$. On procède par IPP.

$\int \ln(1+x)\,dx = \int 1 \times \ln(1+x)\,dx$.

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1+x)$

Donc $u(x) = 1+x$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\int \ln(1+x) = (1+x)\ln(1+x) - \int dx$$

$$= (1+x)\ln(1+x) - x + C$$

Donc : $\int f(x)\,dx = x \ln x - (1+x)\ln(1+x) + x + C$

$$= x - \ln(1+x) + C'$$

---

5) $f(x) = \beta x e^{-\alpha x}$

$\int f(x)\,dx = \int \beta x e^{-\alpha x}\,dx$ IPP

$u(x) = \beta x$ $\quad u'(x) = \beta$

$v(x) = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$ $\quad v'(x) = e^{-\alpha x}$

$$\int f(x)\,dx = -\frac{\beta x e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= -\frac{\beta x}{\alpha}e^{-\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha^2}e^{-\alpha x} + C.$$

6) $f(x) = x \cos x$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cos x \, dx$$ IPP

On pose $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = \sin x$ $\quad v'(x) = \cos x$

$$\int f(x)\,dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$