Licence des Sciences de la Mer et de l'Environement
Unité d'Enseignement "Initiation à la Modélisation en Ecologie"
Année 2007-2008

Correction TD 4 - Equations différentielles linéaires

Exercice 1

a)

$$y' + 3y = 0 \qquad \text{eq.à} \qquad y' = -3y$$

La forme générale des solutions est

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x}\ , \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

b)

$$y' - 2y + 2x = 0$$

Le système sans second membre s'écrit :

$$Y' = 2Y$$

La forme générale de ses solutions est :

$$Y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x}\ , \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

On applique la méthode de variation de la constante en remplaçant C_1 par une fonction $C_1(x)$. On cherche alors une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre sour la forme $y_0(x) = C_1(x)\mathrm{e}^{2x}$. En dérivant, on obtient $y_0'(x) = C_1(x).2\mathrm{e}^{2x} + C_1'(x)\mathrm{e}^{2x}$, soit $y_0'(x) = 2y_0(x) + C_1'(x)\mathrm{e}^{2x}$. En réinjectant ces expressions dans l'équation différentielle de départ, on a :

$$\left(2y_0(x) + C_1'(x)\mathrm{e}^{2x}\right) - 2y_0(x) + 2x = 0 \quad \text{eq.à} \quad C_1'(x)\mathrm{e}^{2x} = -2x \quad \text{eq.à} \quad C_1'(x) = -2x\mathrm{e}^{-2x}$$

A l'aide d'une intégration par partie, on obtient une solution particulière $C_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}$. On a donc

$$y_0(x) = C_1(x)\mathrm{e}^{2x} = x - \frac{1}{2}$$

La forme générale des solutions de l'équation différentielle avec second membres est obtenue en additionnant les solutions de l'équation sans second membre avec la solution particulière du système complet :

$$y(x) = Y(x) + y_0(x)$$

$$\text{soit} \qquad y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + x - \frac{1}{2}\ , \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Le système d'équations différentielles peut s'écrire sous la forme matricielle $\dot{X} = AX$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation de A

La première étape de résolution consiste à déterminer si la matrice A est diagonalisable et à la diagonsaliser le cas échéant. On détermince le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ -4 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) + 3 \times 2 \times (-4) + 2 \times (-4) \times 3 \\ &\quad\quad - 4(4-\lambda) \times 2 - 3 \times 2(-3-\lambda) - (3-\lambda) \times -4 \times 3 \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-2). \qquad \text{(racines évidentes)} \end{aligned}$$

A admet donc une valeur propre double, 1, et une valeur propre simple, 2. Comme A n'admet pas trois valeurs propres distinctes, on ne sait pas encore si elle est diagonalisable ou non. On examine les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2.

- E_1 : sous-espace propre associé à $\lambda = 1$

  Pour déterminer E_1, on résout l'équation matricielle en X : $AX = 1.X$, i.e. $AX = X$. En revenant aux notations "systèmes d'équations", on obtient :

  $$\begin{cases} -3x + 3y + 2z = x \\ -4x + 4y + 2z = y \\ -4x + 3y + 3z = z \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -4x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

  $$\text{eq.à} \quad -4x + 3y + 2z = 0$$

  Cette relation nous donne deux degrés de liberté pour choisir les vecteurs de E_1 (par exemple x, puis y, z étant alors déterminé par la relation) qui est donc de dimension 2. On choisit deux vecteurs libres (c'est à dire, pour 2 vecteurs, non colinéaires) qui engendrent E_1. On peut prendre : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

  A ce stade, comme on a déterminé que E_1 est de dimension 2 et comme E_2 est nécessairement de dimension 1 (sous-espace propre associé à une valeur propre simple), et que donc $dim(E_1) + dim(E_2) = 3$, A est diagonalisable. On détermine un vecteur propre de E_2 pour obetenir une base de vecteurs propres et la matrice de passage P entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et cette base.

- E_2 : sous-espace propre associé à $\lambda = 2$

  De la même manière que pour E_1, on résout l'équation matricielle en $AX = 2X$. En changeant de notations, on obtient :

$$\begin{cases} -3x + 3y + 2z = 2x \\ -4x + 4y + 2z = 2y \\ -4x + 3y + 3z = 2z \end{cases} \quad \text{eq.à} \quad \begin{cases} -5x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 2y + 2z = 0 \\ -4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{eq.à} \quad \begin{cases} x = y \\ z = x \end{cases}$$

  Comme vecteur de E_2, on prend $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage entre la base canonique et la base de vecteurs propres s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = P^{-1}DP$.

En reprenant le système d'équations différentielles $\dot{X} = AX$, on obtient :

$$\dot{X} = PDP^{-1}X.$$

Avec U le vecteur X exprimé dans la base de vecteurs propres, c'est-à-dire $U = P^{-1}X \quad \text{eq.à} \quad PU = X$, on a :

$$P\dot{U} = PDU$$
$$\text{eq.à} \qquad \dot{U} = DU.$$

Le vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 \\ \dot{u}_2 = u_2 \\ \dot{u}_3 = 2u_3 \end{cases}$$

La résolution de ces équations différentielles séparées est maintenant très aisée. La forme générale des solutions est :

$$\begin{cases} u_1(t) = C_1 \mathrm{e}^t \\ u_2(t) = C_2 \mathrm{e}^t \\ u_3(t) = C_3 \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

avec C_1, C_2 et C_3 trois constantes réelles.

Comme $X = PU$, on obtient au final :

$$\begin{cases} x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_3\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = 2C_2\mathrm{e}^t + C_3\mathrm{e}^{2t} \\ z(t) = 2C_1\mathrm{e}^t - 3C_2\mathrm{e}^t + C_3\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \qquad \textit{soit} \qquad \begin{cases} x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_3\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = 2C_2\mathrm{e}^t + C_3\mathrm{e}^{2t} \\ z(t) = (2C_1 - 3C_2)\mathrm{e}^t + C_3\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x & +y \\ \dot{y} = & -y \end{cases}$$

Comme le système est triangulaire supérieure, on procède de manière directe, en résolvant les équations de bas en haut.

Comme $\dot{y} = -y$, la forme générale des solutions y est :

$$y(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}$$

avec C_1 constante réelle.

On substitue ce résultat dans la première ligne du système d'équations différentielles :

$$\dot{x} = 2x + C_1\mathrm{e}^{-t}$$

x vérifie une quation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre $(C_1\mathrm{e}^{-t})$.

Le système sans second membre $\dot{X} = 2X$ a pour solution générale $X(t) = C_2\mathrm{e}^{2t}$, $\quad C_2 \in \mathbb{R}$.

La recherche d'une solution particulière x_0 s'effectue à l'aide de la méthode de variation de la constante. On pose $x_0(t) = C_2(t)\mathrm{e}^{2t}$, d'où $\dot{x}_0(t) = 2C_2(t)\mathrm{e}^{2t} + C_2'(t)\mathrm{e}^{2t} = 2x_0(t) + C_2'(t)\mathrm{e}^{2t}$.

Comme x_0 vérifie l'équation différentielle $\dot{x} = 2x + C_1\mathrm{e}^{-t}$, on a :

$$2x_0(t) + C_2'(t)\mathrm{e}^{2t} = 2x_0(t) + C_1\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{eq.à} \qquad C_2'(t)\mathrm{e}^{2t} = C_1\mathrm{e}^{-t}$$

$$\text{eq.à} \qquad C_2'(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t}$$

Une solution particulière est obtenue par intégration :

$$C_2(t) = \frac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$$

et donc

$$x_0(t) = C_2(t)\mathrm{e}^{2t} = \frac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{2t} = \frac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-t}$$

La solution générale s'obtient en ajoutant la solution générale du système sans second membre X à la solution particulière x_0 : $x(t) = C_2\mathrm{e}^{2t} + \dfrac{C_1}{3}\mathrm{e}^{-t}$. On a :

$$\begin{cases} x(t) = C_2\mathrm{e}^{2t} + dfracC_13\mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

$$\begin{cases} \dot{x} = & 2x + & y + & 3z \\ \dot{y} = & & -y + & z \\ \dot{z} = & & & z \end{cases}$$

On procède comme dans l'exercice 3. La dernière ligne nous donne la forme générale des solutions pour z :

$$z(t) = C_1 \mathrm{e}^t \qquad , C_1 \in \mathbb{R}$$

On substitue l'expression de $z(t)$ dans l'équation de $\dot{y}$:

$$\dot{y} = -y + C_1 \mathrm{e}^t$$

Le système sans second membre associé a pour solution $Y(t) = C_2 \mathrm{e}^{-t}, \quad C_2 \in \mathbb{R}$.

En faisant varier la constante C_2, on a $y_0(t) = C_2(t)\mathrm{e}^{-t}$ et $\dot{y}_0(t) = -y_0(t) + \dot{C}_2(t)\mathrm{e}^{-t}$. En substituant $y_0(t)$ et $y_0'(t)$ dans l'équation différentielle avec second membre, on a

$$-y(t)_0 + \dot{C}_2(t)\mathrm{e}^{-t} = -y(t)_0 + C_1 \mathrm{e}^t \qquad \text{eq.à} \qquad C_2(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t}$$

et donc, une forme particulière pour C_2 est $C_2(t) = \dfrac{C_1}{2}\mathrm{e}^{2t}$, soit $y_0(t) = C_2(t)\mathrm{e}^{-t} = dfracC_1 2\mathrm{e}^t$.

En additionnant la solution particulière y_0 à la solution générale Y du système sans second membre, on a

$$y(t) = C_2 \mathrm{e}^{-t} + dfracC_1 2\mathrm{e}^t$$

On détermine maintenant x dans la première équation du système en substituant les expressions de $y(t)$ et $z(t)$:

$$\dot{x} = 2x + \frac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}{-t}$$

La solution générale du système sans second membre $\dot{X} = 2X$ est $X(t) = C_3 \mathrm{e}2t$. En faisant varier la constante, on écrit $x_0(t) = C_3(t)\mathrm{e}^{2t}$ et par suite $\dot{x}_0(t) = 2x_0(t) + C_3'(t)\mathrm{e}^{2t}$.

L'équation différentielle complète en $\dot{x}$ donne alors :

$$2x_0(t) + C_3'(t)\mathrm{e}^{2t} = 2x_0(t) + \frac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}{-t} \qquad \text{eq.à} \qquad C_3'(t) = \frac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}{-3t}$$

par intégration, on a :

$$C_3(t) = -\frac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{3}C_2 \mathrm{e}{-3t} \qquad \text{et} \qquad x_0(t) = C_3(t)\mathrm{e}^{2t} = -\frac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^t - \frac{1}{3}C_2 \mathrm{e}{-t}$$

La solution générale pour x est la somme de la solution générale X du système sans second membre et de la solution particulière x_0, soit

$$x(t) = -\frac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^t - \frac{1}{3}C_2 \mathrm{e}{-t} + C_3 \mathrm{e}^{2t}$$

La solution générale du système est :

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{7}{2}C_1 \mathrm{e}^t - \dfrac{1}{3}C_2 \mathrm{e}{-t} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = \dfrac{C_1}{2}\mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t} \\ z(t) = C_1 \mathrm{e}^t \end{cases} \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$