Licence de Sciences de la Vie et de la Terre
UE Initiation à la Modélisation en Ecologie Marine

TD 1 : Modèles à une variable d'état à temps discret

Exercice 1 : On considère un modèle de la forme $x_{t+1} = f(x_t)$ où f est une fonction dérivable au moins deux fois. On suppose que $\bar{x}$ est un équilibre.

1) Ecrire une équation permettant de caractériser $\bar{x}$.
2) On pose $\delta_t = x_t - \bar{x}$. Interpréter cette grandeur.
3) Exprimer δ_{t+1} en fonction de x_{t+1}, puis en fonction de x_t, et enfin en fonction de δ_t.
4) Donner le développement limité de f en $\bar{x}$ à l'ordre 1. Utiliser ce développement pour simplifier l'expression obtenue à la fin de la question précédente.
5) Donner une condition suffisante pour que δ_t tende vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Que signifie ce résultat ?

Exercice 2 : On s'intéresse au modèle linéaire $x_{t+1} = \alpha x_t$ avec x_0 un nombre réel positif ou nul.

1) Comment appelle-t-on le paramètre α ?
2) Exprimer x_t en fonction de α, t et x_0.
3) Quelle est la dynamique de x_t en fonction des valeurs de α ?
4) Calculer les équilibres de ce modèle. Déterminer leur stabilité.
5) Si $\alpha > 1$, quel est le temps de doublement de la grandeur x ?

Exercice 3 : Dans cet exercice, on aborde l'analyse complète du modèle de croissance logistique à temps complet. On considère le modèle suivant :

$$N_{t+1} = rN_t(1 - \frac{N_t}{K})$$

1) Interpréter ce modèle.
2) On pose $x_t = \frac{N_t}{K}$. Que représente cette grandeur ? Quelle est sa dimension ? Ré-écrire le modèle en utilisant la variable x_t à la place de la variable N_t. Que remarquez-vous ?
3) On définit la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = rx(1-x)$ où r est un réel positif. Déterminer la valeur maximale de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$. A quelle condition sur r cette valeur maximale est-elle inférieure ou égale à 1 ?
4) Expliquer pourquoi le modèle précédent implique que f doit être inférieure ou égale à 1 sur l'intervalle $[0;1]$? En déduire la gamme de variation du taux de croissance intrinsèque de la population.
5) Déterminer les équilibres du modèle.
6) Etudier leur stabilité.
7) Quel est l'impact d'une augmentation du taux de croissance de la population sur la dynamique de la population ?
8) Tracer la courbe de f pour $r = 2$. On pose $x_0 = 0.1$. Positionner x_0 sur l'axe des abscisses. Déterminer x_1 graphiquement. Déterminer x_2 puis x_3 graphiquement. Déterminer les équilibres graphiquement. Que peut-on dire de la dynamique de x_t dans cet exemple ? Comparer vos résultats avec l'étude faite dans les questions précédentes.

Exercice 4 : On considère le modèle suivant :

$$N_{t+1} = N_t \exp\Big((r-1)(1 - \frac{N_t}{K})\Big)$$

1) Quel est le taux de croissance de la population ? Comment peut-on l'interpréter ?
2) On pose $u_t = \frac{N_t}{K}$, réécrire le modèle avec la variable u_t. Que peut-on en conclure ?
3) Déterminer les équilibres du modèle obtenu et étudier leur stabilité.
4) Comparer les résultats avec ceux du modèle de croissance logistique à temps discret.