

TD – Introduction d'Algèbre Linéaire

**Exercice 1 :** Les systèmes suivants sont-ils libres ? Forment-ils une base ?

a)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2 :** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (2x - y, x, x + 5y)$

b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (-y, x^2 + y^2, -x + 2y)$

c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x - 2y, x + 2y - 3z)$

d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (y + x^2, 2y)$

**Exercice 3 :** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer  $AB$  et  $BA$ .

**Exercice 4 :**

1) On définit la matrice  $P$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible, et si c'est le cas, quelle est sa matrice inverse ?

2) Donner la matrice de l'application linéaire définie au c) de l'exercice 2 dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

3) On pose  $u = 3e_1 + 2e_2$  où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Ecrire la matrice  $U$  de  $u$ . On définit les vecteurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -e_1 - e_2 \\ \varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ? Forment-ils une base ? Exprimer  $e_1$  et  $e_2$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . De même, exprimer  $u$  en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . En déduire la matrice  $U'$  de  $u$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Quelle est la matrice de passage  $P$  définie par le changement de base. Calculer  $P^{-1}U$ . Qu'en conclure ?

**Exercice 5 :** On considère le système de vecteurs  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  définis par :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 + e_2 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$$

où  $(e_1, e_2, e_3)$  désigne la base canonique.

1) Montrer que le système  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- 2) Donner la matrice de passage  $P$  associée.
- 3) Calculer  $P^{-1}$ .
- 4) Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - 3z, x - 2y, 3x - y + z)$ . Vérifier que  $f$  est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
- 5) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ .
- 6) On note  $(x', y', z')$  les coordonnées des vecteurs dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ , exprimer  $(x', y', z')$  en fonction de  $(x, y, z)$ .

**Exercice 6 :** On considère une population divisée en deux classes d'âge, les juvéniles et les adultes. On note  $m_J$  le taux de mortalité des juvéniles,  $m_A$  celui des adultes,  $v$  la proportion de juvéniles qui passent adultes par unité de temps et  $f$  le nombre moyen de juvéniles produits par adulte et par unité de temps. Ecrire un système permettant, à partir de la distribution de la population à l'instant  $t$ , de déterminer la distribution à l'instant  $t + 1$ . Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , on compte 153 juvéniles et 61 adultes. Pour  $v = 0.7$ ,  $m_J = 0.2$ ,  $m_A = 0.6$  et  $f = 2$ , déterminer la distribution de la population à l'instant  $t = 2$ .