OCE104 - Master Sc MER - 2018-2019

TD 5 - Correction exos 3 et 4

Exercice 3 :

On pose $N = S + I + R$.

$\frac{dN}{dt} = 0$ donc N est une constante. $R = N - S - I$

Le modèle peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma (N - I - S) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S I - \delta I \end{cases}$$

Equilibres : $\begin{cases} + \beta S I + \gamma I + \gamma S = \gamma N \\ I(\beta S - \delta) = 0 \end{cases}$

$E_1 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_2 = \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{I} \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \bar{S} = \frac{\delta}{\beta} \\ \bar{I} = \frac{\gamma (N - \bar{S})}{\beta \bar{S} + \gamma} \end{cases}$

E_2 n'existe que si $N > \bar{S} \Leftrightarrow N > \frac{\delta}{\beta}$

Stabilité : Matrice jacobienne : $J = \begin{pmatrix} -\beta I - \gamma & -\beta S - \gamma \\ \beta I & \beta S - \delta \end{pmatrix}$

$J_1 = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta N - \gamma \\ 0 & \beta N - \delta \end{pmatrix}$ Les valeurs propres de J_1 sont : $-\gamma < 0$ et $\beta N - \delta$.

Donc E_1 est stable $\Leftrightarrow \beta N - \delta < 0$

$\Leftrightarrow N < \delta / \beta = \bar{S}$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\beta\bar{I} - \gamma & -\beta\bar{S} - \gamma \\ \beta\bar{I} & 0 \end{pmatrix}$$

2

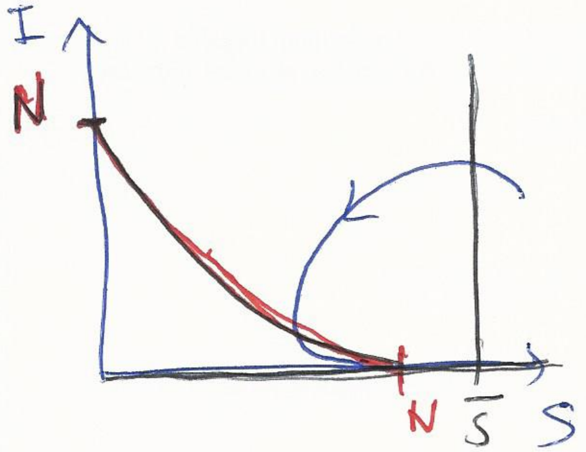
$\det(J_2) > 0$

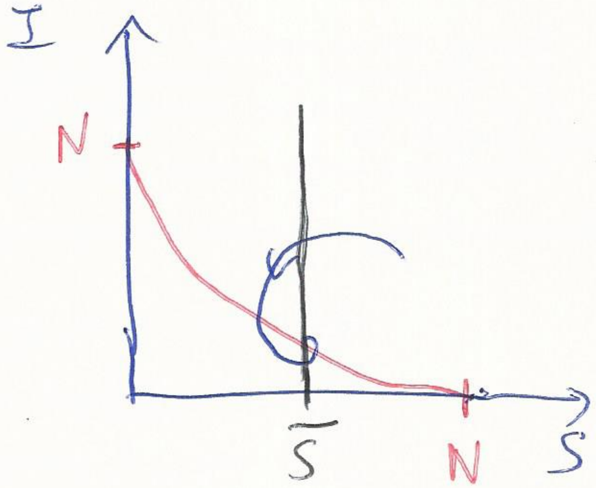
$Tr(J_2) < 0$ $\Rightarrow E_2$ est stable quand il existe.

Portraits de phase.

Isoclines : $\frac{dN}{dt} = 0 \Leftrightarrow I = \frac{\gamma(N-S)}{\beta S + \gamma}$ x

$\frac{dI}{dt} = 0 \Leftrightarrow I = 0$ ou $S = \bar{S} = \frac{\delta}{\beta}$ X





Exercice 4 : I = taux d'apport de nitrate.

k = taux de perte (sédimentation...) du nitrate

a = taux d'absorption.

e = coef. de conversion de nitrate ~~xxx~~ en azote organi

Equilibres :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \iff P = \frac{I - kS}{aS}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \iff P = 0 \text{ ou } S = \frac{m}{ea}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} I/k \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} \bar{S} \\ \bar{P} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \bar{S} = \dfrac{m}{ea} \\ \bar{P} = \dfrac{I - k\bar{S}}{a\bar{S}} \end{cases}$$

E_2 n'existe que si $\bar{P} > 0 \iff I > k\bar{S}$

$$\iff I > \frac{km}{ea}$$

Stabilité : Matrice jacobienne : $J = \begin{pmatrix} -k - aP & -aS \\ eaP & eaS - m \end{pmatrix}$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -k & -a\frac{I}{k} \\ 0 & ea\frac{I}{k} - m \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J_1 sont $-k < 0$ et $ea\frac{I}{k} - m$

E_1 est stable $\iff ea\frac{I}{k} - m < 0$

$$\iff I < \frac{mk}{ea} = k\bar{S}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -k - a\bar{P} & -a\bar{S} \\ ea\bar{P} & 0 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \det(J_2) > 0 \\ \mathrm{Tr}(J_2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2$ est stable s'il existe.

Portraits de phase :

Isoclines : $\dfrac{dS}{dt} = 0 \iff P = \dfrac{I - kS}{aS}$

$\dfrac{dP}{dt} = 0 \iff P = 0$ ou $S = \bar{S} = \dfrac{m}{ea}$