Quelques éléments sur les nombres complexes

J.-C. Poggiale - Septembre 2007

Il y a plusieurs siècles que les mathématiciens essayent de résoudre des équations qui ont des applications dans de nombreux domaines (physique, économie, etc.). Au XVIIIème siècle, en essayant de résoudre une équation qui devait avoir une solution "réelle", ils furent amenés à devoir résoudre l'équation $x^2 = -1$, ce qui n'a pas de sens puisque le carré d'un nombre "réel" est positif. Au lieu d'abandonner, l'un d'eux (Jérôme Cardan) décida de dé finir un nombre qu'il nomma $\sqrt{-1}$ et dont le carré était -1 par définition. Cette démarche *a priori* irréaliste, lui permit de trouver la solution réelle au problème qu'il s'était posé. C'est ainsi que les nombres "imaginaires" (dénomination inventée par René Descartes) furent inventés et utilisés: ils interviennent dans la mise en place des méthodes de résolution des problèmes et simplifient notablement les calculs. Evidemment, ce ne sontpas des nombres réels et les mathématiciens ont inventé un ensemble des nombres "complexes": ce sont des nombres qui s'écrivent comme la somme d'un nombre réel et d'un nombre imaginaire. On peut alors effectuer toutes les opérations habituelles (addition, soustraction, multiplication et division) sur les nombres complexes. Ce chapitre part de ce postulat et présente quelques résultats élémentaires sur la représentation et l'utilisation des nombres complexes, illustrés par des exemples.

1 Définition et représentation géométrique

Comme il est mentionné plus haut, les nombres complexes ont été défini à partir de la solution de l'équation $x^2 = -1$. A partir de maintenant, la solution de cette équation sera notée i. C'est un nombre dont le carré vaut -1, par définition.

Définition: *Un nombre complexe z est une somme quelconque de la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.*

Le nombre x est appelée *partie réelle* de z et le nombre y est appelé *partie imaginaire* de z.

Cette définition illustre le fait que pour parler d'un nombre complexe, on doit utiliser deux nombres réels et le nombre imaginaire i. On peut donc considérer que la donnée d'un nombre complexe correspond à la donnée d'un couple de réels (x, y). Ce point de vue permet de représenter chaque nombre complexe z par un point dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Or un point M dans le plan peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y, mais il peut également être représenté par la distance ρ qui le sépare de O et l'angle θ entre l'axe des x et la droite qu'il définit avec le point O, le couple (ρ, θ) désigne les coordonnées polaires de M. Le nombre ρ s'appelle *module de z* (notation: $|z|$) l'angle θ s'appelle *argument de z* (notation: $\arg(z)$). On peut établir des relations entre (x, y) d'une part et (ρ, θ) d'autre part, ce qui s'avérera utile lorsqu'on désirera changer de mode de représentation.

Notons M' la projection ortogonale de M sur l'axe des x. En considérant le triangle $OM'M$, rectangle en M', on a les relations:

$$\begin{array}{rcl} x & = & OM' = \rho\cos(\theta) \\ y & = & M'M = \rho\sin(\theta) \end{array}$$

On a donc obtenu les relations:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos(\theta) \\ y & = & \rho\sin(\theta) \end{array}$$

En utilisant la notation cartésienne d'un nombre complexe $z = x + iy$, on obtient: $z = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. On posera dorénavant: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (formule due à Leonhard Euler). Le nombre z s'écrit alors:

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$$

Cette notation *astucieuse* permettra dans la suite de faire des calculs avec des fonctions trigonométriques en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, notamment: $e^{a+b} = e^a e^b$.

Nous venons de voir comment déterminer les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes. Il peut s'avérer utile de faire l'opération inverse, nous remarquons donc que:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) = \rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = \rho^2$$

Le module s'exprime donc en fonction des coordonnées cartésiennes par:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pour obtenir l'argument, il suffit de diviser y par x lorsque x est non nul, en effet:

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\sin(\theta)}{\rho\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

donc $\theta = \arctan(y/x)$ si x est non nul. Dans le cas où x est nul, le nombre z est un nombre imaginaire pur. A partir de la relation entre x et (ρ, θ), on déduit $\cos(\theta) = 0$, donc $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, le signe étant celui de y.

Définition: *étant donné un nombre complexe $z = x + iy$, on définit le nombre complexe conjugué $\overline{z} = x - iy$.*

En terme de représentation géométrique, le nombre complexe conjugué de z est représenté par le symétrique de la représentation de z par rapport à l'axe des x. z et $\overline{z}$ ont le même module mais ont des arguments opposés.

2 Opérations sur les nombres complexes

Nous rappelons dans cette section les opérations élémentaires sur les nombres complexes. On considère deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. On peut définir très simplement leur somme $z_1 + z_2$ et leur différence $z_1 - z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Leur produit $z_1 z_2$ se définit également simplement et fait intervenir le nombre i^2, qui par définition est égale à -1:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Le produit d'un nombre complexe $z = x + iy$ par son nombre complexe conjugué $\overline{z} = x - iy$ est toujours un nombre réel, c'est le carré du module de z. En effet:

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x + iy)\,(x - iy) \\ &= \left(x^2 + y^2\right) + i\,(xy - xy) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Avant de définir le quotient, regardons tout d'abord comment écrire l'inverse d'un nombre réel $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} \\ &= \frac{(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

En multipliant le dénominateur par le complexe conjugué de z_2, on ramène ce dénominateur à un nombre réel. L'inverse de z_2 s'écrit donc comme un nombre complexe: partie réelle plus i fois la partie imaginaire. Le quotient z_1/z_2 n'est autre que le produit de z_1 avec $\frac{1}{z_2}$. On obtient donc:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}
\end{aligned}
$$

3 Formules trigonométriques et nombres complexes

A partir de la formule d'Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on peut démontrer les formules trigonométriques. Tout d'abord, l'écriture précédente implique:

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\
\sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}
\end{aligned}
$$

Ces expressions des fonctions trigonométriques nous donnent les relations suivantes:

$$
\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2} \\
&= \frac{e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib}}{2} \\
&= \frac{e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib}}{2} \\
&= \frac{2e^{ia}e^{-ib} + 2e^{-ia}e^{ib}}{4} \\
&= \frac{e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib} - e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}}{4} \\
&= \frac{\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right) - \left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\left(e^{ib} - e^{-ib}\right)}{4} \\
&= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)
\end{aligned}
$$