

TD 1 : Séance de révision - Fonctions et modélisation

Exercice 1: On considère la droite passant par le point de coordonnées $(1, 1)$ et le point de coordonnées $(3, 5)$. Quelle est sa pente? Quelle est son ordonnée à l'origine? Tracer dans un repère cartésien les deux points et la droite.

Exercice 2: On considère la droite passant par le point de coordonnées $(1, 3)$ et de pente $-1/2$. Passe-t-elle par le point de coordonnées $(3, 5)$? Passe-t-elle par le point de coordonnées $(3, 2)$?

Exercice 3: On considère la droite d'équation $y = 2x - 3$ et la droite d'équation $y = -x + 3$. Déterminer le point d'intersection de ces droites.

Exercice 4: On considère la droite passant par les points de coordonnées $(1, -2)$ et $(3, 4)$ et la droite passant par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(2, -5)$. Tracer ces droites dans un repère cartésien. Déterminer leur point d'intersection graphiquement, puis analytiquement.

Exercice 5: Que représente la dérivée d'une fonction f en un point x_0 donné? Rappeler la définition du nombre dérivé en x_0 .

Exercice 6: Donner les ensembles de définition puis calculer les dérivées des fonctions suivantes:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^4$ b) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{1 + x^3}$ c) $f(x) = \log(3x^2)$

Exercice 7: Donner les ensembles de définition puis calculer les dérivées des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \log(\cos(3x))$ b) $f(x) = x \exp(-\frac{x^2}{2})$ c) $f(x) = \tan(x)$ d) $f(x) = \arctan(x)$

Exercice 8: Donner les ensembles de définition puis calculer les dérivées des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \arcsin(3x)$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ c) $f(x) = \frac{1}{\log(2x + 1)}$

Exercice 9: Résoudre les équations suivantes:

a) $2x + 3 = 1 - x$ b) $x^2 - x - 2 = 0$ c) $x^4 - x^2 - 2 = 0$
d) $\frac{2u}{1+u} = 3$ e) $\frac{aP}{b+P^2} = m$ où a, b et m sont des paramètres positifs.
f) $N^5 - 4N^3 + 3N^2 = 0$

Exercice 10: On considère un prédateur capturant des proies au taux f défini par:

$$f(P) = aP \exp(-bP)$$

où P désigne la densité des proies et a et b sont deux paramètres positifs. Existe-t-il une densité de proie pour laquelle le taux de capture soit maximal et si oui, laquelle? Interpréter le résultat en termes de capture des proies.

Exercice 11: On considère la fonction f définie par $f(x) = rx(1-x)$, où r est un paramètre positif. x est supposé positif ou nul dans cet exercice. Montrer que la fonction f admet un maximum entre 0 et 1 et déterminer la valeur de f maximale. A quelle condition sur r la fonction f est-elle comprise entre 0 et 1?

On considère une population de densité N_t à l'instant t et on suppose qu'elle suit une croissance gouvernée par le modèle de croissance logistique suivant:

$$N_{t+1} = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

On pose $u_t = \frac{N_t}{K}$. Que représente u_t ? Exprimer u_{t+1} en fonction de u_t . Quelles sont les gammes de valeurs plausibles pour u_t ? Qu'est-ce que cela implique sur r ?