MASTER SC. MER - UE OCE104

Correction du TD 1.

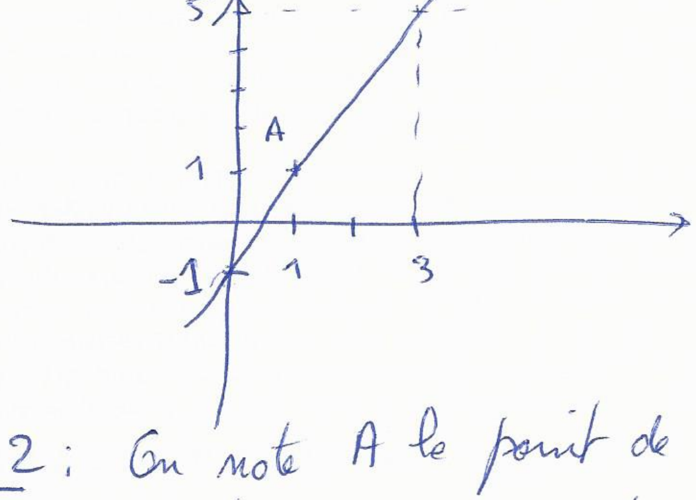
Exercice 1: On note A le point de coordonnées (1; 1) et B le point de coordonnées (3; 5).

La pente de la droite (AB) est :

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Si on note $y = ax + b$ l'équation de la droite (AB) on a $a = p = 2$ et pour déterminer l'ordonnée à l'origine b, il suffit de dire que cette droite passe par A : $y_A = p\,x_A + b \Rightarrow b = y_A - 2x_A = 1 - 2 = -1$

Donc $y = 2x - 1$ est l'équation de cette droite.



Exercice 2: On note A le point de coordonnées (1; 3). La droite de pente $-1/2$ passant par A a pour équation $y = -\frac{x}{2} + b$ et comme $y_A = -\frac{x_A}{2} + b$, on

en déduit que $b = y_A + \frac{x_A}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

On note B le point de coordonnées $(3;5)$

——— C ——— $(3;2)$

$-\frac{x_B}{2} + \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \neq y_B$ donc la droite ne passe par B.

$-\frac{x_C}{2} + \frac{7}{2} = 2 = y_C$ donc la droite passe par C.

Exercice 3 : Le point d'intersection entre les 2 droites est le point de coordonnées $(x;y)$ qui vérifie les 2 équations. On résoud donc le système :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = -x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

$(2;1)$ est le point d'intersect° des droites.

Exercice 4 : On note A le point de coordonnées $(1;-2)$

B ———— $(3,4)$

C ———— $(0;1)$

D ———— $(2;-5)$

On cherche le point d'intersect° des droites (AB) et (CD). On va d'abord déterminer les équations de ces deux droites.

Pente de (AB) : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{6}{2} = 3$

L'équation de (AB) est de la forme $y = 3x + b$ et elle passe par A donc $y_A = 3x_A + b \Rightarrow b = -2 - 3 = -5$

$y = 3x - 5$ est l'équation de (AB).

Pente de (CD) : $\dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \dfrac{-6}{2} = -3$

L'équation de (CD) est de la forme $y = -3x + b$ et elle passe par C donc : $y_C = -3x_C + b \Rightarrow b = 1$

$y = -3x + 1$ est l'équation de (CD).

L'intersection des 2 droites est solution de :

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 3x - 5 = -3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ 6x = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$(1;-2)$ est le point d'intersection.

Exercice 5 : la dérivée de f en x_0 est la valeur de la pente de la tangente au graphe de f en x_0. Elle permet de connaître le sens de variation de f en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Exercice 6 :

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^4 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 20x^3$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2}{1+x^3}$ $\qquad f$ n'est pas définie si $1+x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1$

$\Leftrightarrow x = -1$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. ($\mathbb{R}$ privé de $\{-1\}$).

$$f'(x) = \frac{(4x^3-4x)(1+x^3) - (x^4-2x^2)3x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x^6 - 4x - 4x^4 - 3x^6 + 6x^4}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{x^6 + 2x^4 + 4x^3 - 4x}{(1+x^3)^2}$$

c) $f(x) = \ln(3x^2)$

f n'est pas définie si $3x^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{6x}{3x^2}}$$

Exercice 7 :

a) $f(x) = \ln(\cos(3x))$.

f n'est définie que si $\cos 3x > 0$

$\Leftrightarrow 3x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\mod(2\pi)$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3\sin(3x)}{\cos 3x}}$$

b) $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

d) $f(x) = \text{Arctan}(x)$ $\quad \mathcal{D}_f =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Soit $g(\cancel{x}y) = \tan \cancel{x}y$. $\quad y = \text{Arctan}\, x$.

$g(y) = g(\text{Arctan} x) = \tan(\text{Arctan}\, x) = x$.

~~donc~~ Autrement dit : $g(f(x)) = x$

donc $g'(f(x))\, f'(x) = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Or d'après la question précédente $g'(y) = 1 + \tan^2 y$

donc $g'(f(x)) = g'(\text{Atan} x) = 1 + \tan^2(\text{Atan} x)$

$$= 1 + x^2$$

donc $\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$.

Exercice 8 :

a) $f(x) = \text{Asin}(3x)$ $\quad 3x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$x \in]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[= \mathcal{D}_f$.

$g(y) = \sin(y)$

$g(f(x)) = \sin(\text{A}\sin 3x) = 3x$

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3 \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{g'(f(x))}$

$g'(y) = \cos(y) \qquad g'(f(x)) = \cos(A\sin 3x)$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{3}{\cos(A\sin 3x)}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$

$x^2 + 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x+3) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant -3) \text{ ou } (x \leqslant 0 \text{ et } x \leqslant -3)$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ ou } x \leqslant -3.$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty ; -3[\cup]0 ; +\infty[.$$

$f(x) = u^{1/2}$ où $u = x^2 + 3x$

$f'(x) = \frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x}^3} \times (2x+3)$

c) $f(x) = \frac{1}{\ln(2x+1)}$

$2x+1 > 0$

et $\ln(2x+1) \neq 0$

$\Rightarrow x > -1/2$ et $2x+1 \neq 1$

$\Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$

$$\mathcal{D}_f =]-\tfrac{1}{2} ; 0[\cup]0 ; +\infty[.$$

$f(x) = \frac{1}{u}$ où $u = \ln(2x+1) \qquad u' = \frac{2}{2x+1}$

$f'(x) = -1 u^{-2} u' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2}{(2x+1)\ln^2(2x+1)}$

Exercice 9 :

a) $2x + 3 = 1 - x \iff 3x = -2$

$\iff x = -\frac{2}{3}$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$ $\quad \boxed{x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}}$

c) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

On pose $X = x^2$ $\quad X^2 - X - 2 = 0$

$\Rightarrow X = 2$ ou $X = -1$ (impossible car X est un carré)

$X = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

d) $\frac{2u}{1+u} = 3 \iff 2u = 3 + 3u$

$\iff -u = 3$

$\iff \boxed{u = -3}$

e) $\frac{aP}{b+P^2} = m \iff aP = mb + mP^2$

$\iff mP^2 - aP + mb = 0$

$\Delta = a^2 - 4m^2 b > 0$ si $a > 2m\sqrt{b}$

$\Rightarrow P = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4m^2 b}}{2m}$

f) $N^5 - 4N^3 + 3N^2 = 0$

$\iff N^2(N^3 - 4N + 3) = 0$

$\iff N = 0$ ou $N^3 - 4N + 3 = 0$

Exercice 10 : $f(P) = aPe^{-bP}$

$f'(P) = ae^{-bP} - abPe^{-bP} = ae^{-bP}(1 - bP)$

$f'(P) = 0 \iff \boxed{P = \frac{1}{b}}$

Si la densité des proies est $P = 1/b$ alors le taux de capture est maximal.