MASTER DE SCIENCES DE LA MER
TRONC COMMUN - S1
Unité d'Enseignement OCE 104 "MODELISATION : METHODES ET APPLICATIONS"

TD 1 – Initiation à la modélisation - Rappel sur les fonctions réelles

Exercice 1 :
1) Développer l'expression $(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$.
2) Calculer la limite quand x tend vers x_0 de l'expression :

$$\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

Qu'en conclure ?

Exercice 2 : Donner l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + 3x - 4}$
2) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$
3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$
4) $f(x) = \log(\dfrac{3x - 1}{x + 2})$

Exercice 3 : Etudier les deux fonctions suivantes (ensemble de définition, extrêma, tableau de variation, graphe) :
1) $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$
2) $f(x) = \dfrac{x + 1}{5x^2 + 4x - 1}$

Exercice 4 : Donner le développement limité à l'ordre n en x_0 des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \log(1 + x)$ avec $x_0 = 0$ et $n = 3$
2) $f(x) = \exp(x)$ avec $x_0 = 0$ et $n = 4$

Exercice 5 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x \log(x)}{x - 1}$$

où $x \in]1; +\infty[$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

1) soit g la fonction définie par $g(x) = x - 1 - \log(x)$. Montrer que la fonction g est strictement croissante. Quelle est sa limite lorsque x tend vers 1 ? Quelle relation peut-on alors écrire entre $g(x)$ et 0 pour $x > 1$?

2) Montrer que la dérivée de f est du même signe que g et en déduire le sens de variation de f pour $x > 1$.

3) En posant $x = 1 + u$, écrire un développement limité de f au voisinage de $x = 1$ (donc de $u = 0$). En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

4) Conclure.

Exercice 6 : On considère le modèle de dynamique de populations suivant :

$$N_{t+1} = rN_t(1 - \frac{N_t}{K})$$

On pose $x_t = \dfrac{N_t}{K}$.

1) Que représente x_t et quelle est sa dimension ? Calculer x_{t+1} en fonction de x_t. Qu'en concluez-vous ?

2) On définit la fonction f par $f(x) = rx(1-x)$ pour tout $x \in [0;1]$. Etudier la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et donner sa valeur maximale ?

3) Déduire de la question précédente une valeur maximale pour r pour que f définisse bien un modèle de dynamique de populations.

4) Déterminer le/les équilibre(s) du modèle $x_{t+1} = f(x_t)$ et étudier sa/leur stabilité.