MASTER DE SCIENCES DE LA MER
TRONC COMMUN - S1
Unité d'Enseignement OCE 104 "MODELISATION : METHODES ET APPLICATIONS"

TD 4 – Changement de base et diagonalisation

Exercice 1 :
1) On définit la matrice P suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible, et si c'est le cas, quelle est sa matrice inverse ?
2) Donner la matrice de l'application linéaire définie au c) de l'exercice 2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) On pose $u = 3e_1 + 2e_2$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice U de u. On définit les vecteurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -e_1 - e_2 \\ \varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs ε_1 et ε_2 ? Forment-ils une base ? Exprimer e_1 et e_2 en fonction de ε_1 et ε_2. De même, exprimer u en fonction de ε_1 et ε_2. En déduire la matrice U' de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Quelle est la matrice de passage P définie par le changement de base. Calculer $P^{-1}U$. Qu'en conclure ?

Exercice 2 : On considère le système de vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ définis par :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ \varepsilon_2 = e_1 + e_2 \end{cases}$$

où (e_1, e_2) désigne la base canonique.
1) Montrer que le système $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner la matrice de passage P associée.
3) Calculer P^{-1}.
4) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + 2y, x - 2y)$. Vérifier que f est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
5) Donner la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
6) On note (x', y') les coordonnées des vecteurs dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, exprimer (x', y') en fonction de (x, y).

Exercice 2 : Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes et diagonaliser les quand elles sont diagonalisables.

1) $A = \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ 15 & -13 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 11 & -36 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$