

TD 5 – Modèles à plusieurs variables d'état

**Exercice 1 :** Cet exercice fait suite au précédent. On suppose maintenant que l'effort de pêche n'est pas constant. On note  $c$  le coût unitaire par unité de temps de l'effort de pêche et on suppose que  $(N, E)$  vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - qNE \\ \frac{dE}{dt} &= qEN - cE\end{aligned}$$

- 1) Interpréter le modèle précédent.
- 2) Déterminer les équilibres de ce modèle.
- 3) Etudier leur stabilité et leur nature.
- 4) Tracer le(s) portrait(s) de phase et interpréter les résultats.

**Exercice 2 :** On considère le modèle de compétition suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2}\right)\end{aligned}$$

- 1) Interpréter les paramètres et les termes de ce modèle.
- 2) On pose  $x_i = \frac{N_i}{K_i}$  et  $c_{ij} = b_{ij} \frac{K_j}{K_i}$ . Réécrire le modèle avec ces variables et paramètres.
- 3) Déterminer les équilibres du modèle obtenu dans la question 2).
- 4) Etudier la stabilité et la nature des équilibres.
- 5) Tracer le(s) portrait(s) de phase et interpréter les résultats.

**Exercice 3 :** On considère le modèle d'épidémiologie suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \delta I \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I - \gamma R\end{aligned}$$

où  $S(t)$ ,  $I(t)$  et  $R(t)$  désignent les densité d'individus susceptibles, infectés et réfractaires dans le milieu à l'instant  $t$ .

Etudier le modèle après l'avoir interprété.

**Exercice 4 :** On considère le modèle biogéochimique suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= I - kS - aSP \\ \frac{dP}{dt} &= eaSP - mP\end{aligned}$$

où  $S(t)$  et  $P(t)$  désignent les concentrations en nutriments (e.g. nitrate) et en cellules phytoplanctoniques (producteurs primaires) dans le milieu à l'instant  $t$ .

Etudier le modèle après l'avoir interprété.