Master d'Océanographie - 1ère année
Unité d'Enseignement OBEM 208 "Complexité des écosystèmes marins"

TD 3 : Hétérogénéité spatiale - Indice de dispersion - Dynamique de populations

Exercice 1 : On considère la fonction $f : x \mapsto \sin(2k\pi x)$, où k est un nombre entier naturel, et $x \in [-10; 10]$. Cette fonction est-elle périodique (si oui, préciser sa période)? Est-elle paire? Est-elle impaire? Calculer sa moyenne et son écart-type sur l'intervalle $[-10; 10]$. Refaire l'exercice avec la fonction $f : x \mapsto \cos(2k\pi x)$.

Exercice 2 : Exemple de calcul d'un coefficient de variation et d'une fonction de variation

Soit n un nombre entier positif, on considère la fonction :

$$f(x) = x^n$$

pour $x \in [0; 1]$.

1) Calculer le coefficient de variation de cette fonction. Que peut-on conclure sur l'effet de n?

2) On pose $n = 1$. Soient $h \in [0; 1]$ et $x \in [0; 1 - h]$, déterminer le coefficient de variation de la fonction f sur l'intervalle $[x; x + h]$.

3) Déterminer la moyenne des coefficients précédents lorsque x parcourt l'intervalle $[0; 1 - h]$. Interpréter cette fonction.

Exercice 3 : Le graphique suivant montre la fonction du coefficient de variation pour la fonction $f(x) = x$ (graphique de gauche) et celle de la fonction $f(x) = x^2$ (graphique de droite) sur l'intervalle $[0; 10]$. Comparer les

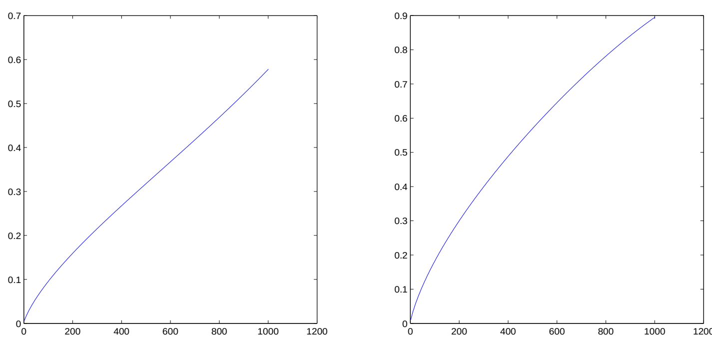

Figure 1: Fonction coefficient de variation

deux graphiques et interpréter le résultat.

Exercice 4 : Les graphiques suivants permettent de quantifier la distribution spatiale de points dans un carré de côté 1. Mille points sont placés aléatoirement dans le carré selon une distribution uniforme (graphique de gauche), c'est-à-dire que toute région d'une surface donnée dans le carré à la même probabilité d'être sélectionnée pour positionner un point. Une expérience consiste à positionner un disque, de rayon h petit, aléatoirement sur le carré et à compter le nombre de points contenus dans le disque. On note X le nombre de points obtenus. X est une variable aléatoire. Au cours d'une série de 6400 expériences numériques comme celle décrite précédemment, on a tracé l'histogramme correspondant (graphique du centre). On note m la valeur moyenne du nombre de points dans le disque sur les 6400 expériences.

On appelle *loi de Poisson*, la loi de probabilité qui dit que la probabilité d'avoir k points dans le disque est:

$$P[X = k] = \frac{\exp(-m)m^k}{k!}$$

Pour chaque valeur de k, on compte la proportion des expériences qui ont conduit à observer k points dans le disque (observation) et on le compare à la probabilité obtenue avec la loi de Poisson (graphique de droite).

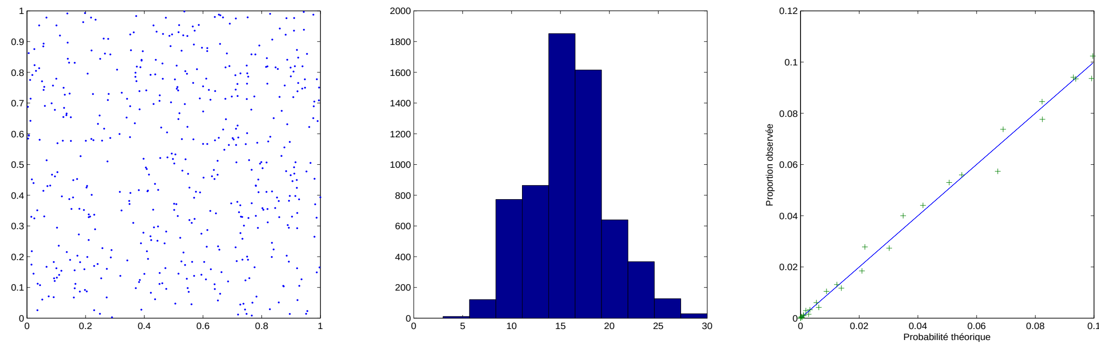

Figure 2: Analyse d'une distribution aléatoire dans le plan

1) Interpréter le résultat obtenu.

2) On calcule l'écart-type du nombre de points contenus dans les disques de rayon h et on trouve σ. On définit alors l'indice de dispersion par $I = \frac{\sigma^2}{m}$. Comment interpréter le résultat $I = 1$? $I < 1$? $I > 1$? (justifier les réponses).

On considère les trois types de distributions suivantes (figure 3). Sur chaque graphique 1000 points sont placés aléatoirement. Pour chacune d'elle, donner une estimation grossière de l'indice de dispersion défini ci-dessus.

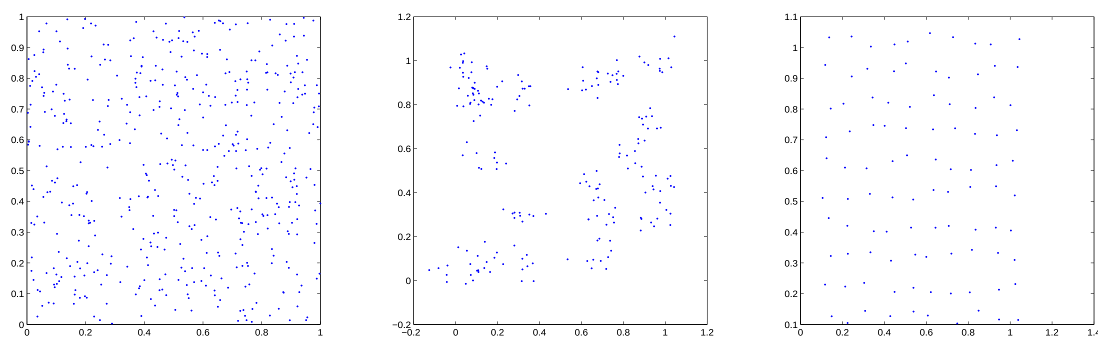

Figure 3: Indice de dispersion

Exercice 5: On considère un domaine divisé en n sites sur lesquelles une population croît selon une loi logistique et entre lesquels la population se disperse:

$$\frac{dN_i}{dt} = rN_i(1 - \frac{N_i}{K}) + M_i$$

où $N_i(t)$ désigne le nombre d'individus sur le site i à l'instant t et M_i représente les processus de déplacements. On pose $F(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$.

1) Exprimer la moyenne des N_i ainsi que leur variance. On notera $\bar{N}$ et $var(N)$ la moyenne et la variance respectivement.

2) Exprimer la dynamique de $\bar{N}$ en fonction de $\bar{N}$ et $var(N)$. Interpréter la formule obtenue.

3) On suppose maintenant que le paramètre K n'est pas homogène mais dépend du site, on note K_i la capacité limite du site i. On pose $F(x, K) = rx(1 - \frac{x}{K})$ et $\bar{K}$ la moyenne des K_i sur l'ensemble des domaines. Donner un développement limité à l'ordre 2 en $(\bar{N}, \bar{K})$ de la fonction F.

4) Etendre le résultat de la question 2) au cas où le paramètre K n'est pas homogène. Interpréter le résultat obtenu.