Master de Sciences de la Mer - 1ère année
Unité d'Enseignement OBEM 209 "MODélisation Avancée en Ecologie Marine"

TD 1 : Rappels

Exercice 1 : On considère une population bactérienne dans un milieu de culture sans facteur limitant. On suppose qu'à chaque instant, des bactéries se divisent. Proposer un modèle simple permettant de représenter la dynamique de cette population. Résoudre l'équation associée au modèle.

Exercice 2 : on suit une cohorte dans une population isolée. On note N le nombre d'individus dans la cohorte et μ le taux de mortalité naturelle de la population.

1) Donner l'unité de μ.

2) Exprimer la variation du nombre d'individus au cours du temps en fonction du nombre d'individus vivants. En déduire l'expression du nombre d'individus vivants à l'instant t en fonction du nombre d'individus présents à $t = 0$, de t et de μ.

3) Quelle est la probabilité de vivre au moins jusqu'à l'instant t ? En déduire la probabilité de mourir avant l'instant t.

4) On considère la variable aléatoire L qui représente la durée de vie d'un individu. Quelle est la densité de probabilité de L ?

5) Quelle est l'espérance de L ?

Exercice 3 : On considère une population structurée en 3 stades : les juvéniles et les adultes. On fait les hypothèses suivantes :

(H1) la proportion m_J de juvéniles qui meurent par mois est de 10% ;
(H2) la proportion m_A d'adultes qui meurent par mois est de 15% ;
(H3) la fécondité moyenne f est de 2 juvéniles par mois par adulte ;
(H4) la proportion v_J de juvéniles qui passent au stade adulte par mois est de 20% ;

On note J_t et A_t le nombre de juvéniles et d'adultes respectivement au jour t. Ecrire un modèle permettant d'exprimer J_{t+1} et A_{t+1} en fonction de J_t et A_t. Comment calculer J_{36} et A_{36} ? Quelle méthode pourrait-on utiliser ?

Exercice 4 : On considère une population dont la densité vérifie l'équation :

$$\frac{dN}{dt} = \mu(N)\,N$$

où $\mu(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$.

1) Interpréter ce modèle.

2) Quels sont les équilibres ? Déterminer leur stabilité.

Exercice 5 : Interpréter et étudier le modèle suivant (on pourra passer par une étape d'adimensionnalisation pour simplifier l'écriture du modèle) :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= D(x_0 - x) - \frac{ax}{b+x}y\\ \frac{dy}{dt} &= e\frac{ax}{b+x}y - my\end{aligned}$$

Exercice 6 : On considère le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)\\ \frac{dy}{dt} &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Montrer que la fonction $L : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est une fonction de Liapunov.

Exercice 7 : 1) Donner le dévoppement limité à l'ordre n de $\log(1 + x)$ en 0.

On considère le modèle suivant :

$$N_{t+\Delta t} = N_t + rN_t\Delta t$$

2) Exprimer $N_{k\Delta t}$ en fonction de k, N_0, r et Δt.

3) On pose $t = k\Delta t$. Exprimer N_T en fonction de N_0, r, t et Δt.

4) Quelle est la limite de cette expression quand Δt tend vers 0 ? Qu'en déduisez-vous ?