Master de Sciences de la Mer - 1ère année
Unité d'Enseignement OBEM 209 "MODélisation Avancée en Ecologie Marine"

TD 2 : Hypothèses et formulation de processus - Consquéquences dynamiques

Exercice 1 : On considère une population de proies dont le nombre d'individus est noté N. Ces individus se déplacent aléatoirement. Pendant une période de temps Δt, le nombre de proies mangées par un prédateur est noté ΔN. On peut diviser l'intervalle de temps Δt en deux intervalles de temps : Δt_s et Δt_h, où Δt_s est le temps moyen que met un prédateur pour trouver des proies (temps de recherche) et Δt_h est le temps moyen qu'il lui faut pour s'en occuper (absorption, assimilation, etc.).

1) Exprimer ΔN en fonction de Δt_s et N.
2) Exprimer Δt_h en fonction de ΔN.
3) Calculer $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ et conclure.

Exercice 2: On considère le modèle prédateur-proie de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy\end{aligned}$$

1) Interpréter les termes et les paramètres de ce modèle.

2) Etudier ce modèle (indication: on pourra vérifier que la fonction H ci-dessous est une fonction de Lyapunov)

$$H(x, y) = cx - d\log(x) + by - a\log(y)$$

3) Remplacer dans le modèle de Lotka-Volterra, la réponse fonctionnelle par la réponse suivante:

$$g(x) = \frac{\alpha x}{\beta + x}$$

Etudier le modèle obtenu et interpréter le résultat (indication: on pourra utiliser le critère de Dulac avec la fonction $\beta(x, y) = \frac{1}{xy}$ sur le domaine $\mathbb{R}^{*2}$).

4) Remplacer dans le modèle de Lotka-Volterra, le terme de croissance par un terme de croissance logistique.

Etudier le modèle obtenu et interpréter le résultat (indication: on pourra utiliser le critère de Dulac avec la fonction $\beta(x, y) = \frac{1}{xy}$ sur le domaine $\mathbb{R}^{*2}$).

5) Remplacer dans le modèle de Lotka-Volterra, la réponse fonctionnelle par la réponse suivante:

$$g(x) = \frac{\alpha x}{\beta + x}$$

et le terme de croissance par un terme de croissance logistique.

Etudier le modèle obtenu et interpréter le résultat (indication: on pourra utiliser le théorème de Poincaré - Bendixon).

Exercice 3 : On considère un chemostat dans lequel on cultive une population phytoplanctonique. On suppose que le taux d'absorption du sel nutritif limitant fourni par dilution suit une loi de Michaëlis - Menten. On suppose également que la vitesse de croissance de la population phytoplanctonique est proportionnelle à la vitesse d'absorption. Enfin, on suppose que la mortalité naturelle de la population phytoplanctonique est négligeable devant le lessivage par dilution. On note D le taux de dilution, on suppose que la concentration de sel nutritif S_0 dans le réservoir du chemostat est constante.

1) Proposer un modèle permettant de représenter la dynamique de la population phytoplanctonique dans le chemostat.

2) Etudier le modèle obtenu.

Exercice 4: On considère un système avec un prédateur et deux populations de proies. On suppose qu'en l'absence du prédateur, la croissance d'une des proies est logistique et l'autre proie a une croissance exponentielle. On suppose que la mortalité des proies induite par prédation proportionnelle au nombre de rencontres entre des proies et des prédateurs. On suppose enfin que la croissance de la population de prédateur est proportionnelle à ce qu'elle consomme. Enfin, le taux de mortalité naturelle du prédateur est supposé constant.

1) Ecrire un modèle satisfaisant ces hypothèses.

2) Etudier les équilibres de ce modèle et la stabilité de l'équilibre positif.

Exercice 5 : Construire un modèle pour un système producteur - consommateur - prédateur, le consommateur consomme le producteur et utilise la biomasse consommée pour produire sa propre biomasse. De même, le prédateur se nourrit du consommateur. Préciser les hypothèses de votre modèle.