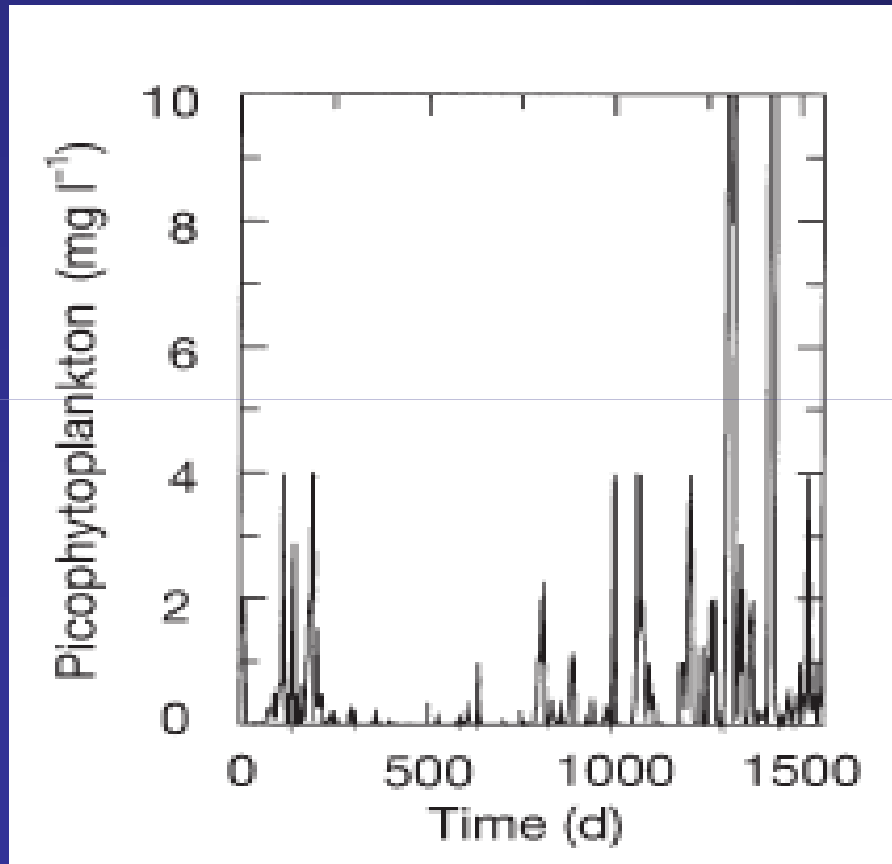


UE : SYSTEMES DYNAMIQUES ET MODELISATION EN ECOLOGIE

MASTER - 2^{ème} année



Dippner *et al.*,
MEPS, 2002

Système dynamique : variable (ou ensemble de variables) qui évolue(nt) au cours du temps.

Domaines d'applications :

- Astronomie
- Physique
- Cardiologie
- Neurologie
- Biologie (physiologie, cellules, organes, ...)
- Écologie

CONCEPTS

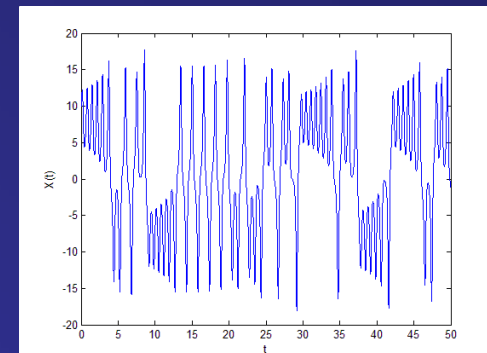
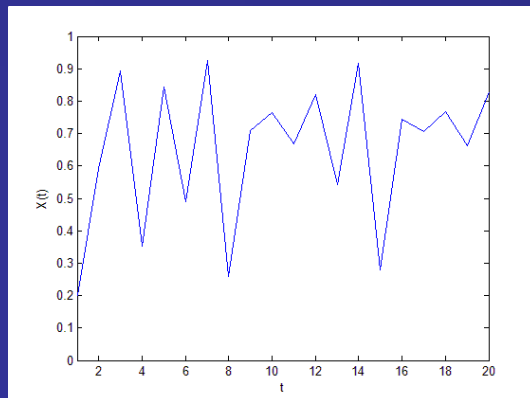


$$X(t+1) = F(X(t))$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

$$X(t+1) = F(X(t), X(t-1), \dots, X(t-k))$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t); X(t-\tau))$$



Données :
Séries
chronologiques

Mathématiques :
Équations
différentielles, ...

Modélisation

```
graph TD; A([Données :  
Séries  
chronologiques]) --> C[Modélisation]; B([Mathématiques :  
Équations  
différentielles, ...]) --> C;
```

Mathématiques

Comportement dynamique : constant, périodique, quasi-périodique, apériodique

Attracteur : équilibre, cycle limite, tore, attracteur étrange



Changement de comportement qualitatif : bifurcations

Bifurcation = perte de stabilité d'un attracteur

Stabilité = linéarisation au voisinage de l'attracteur

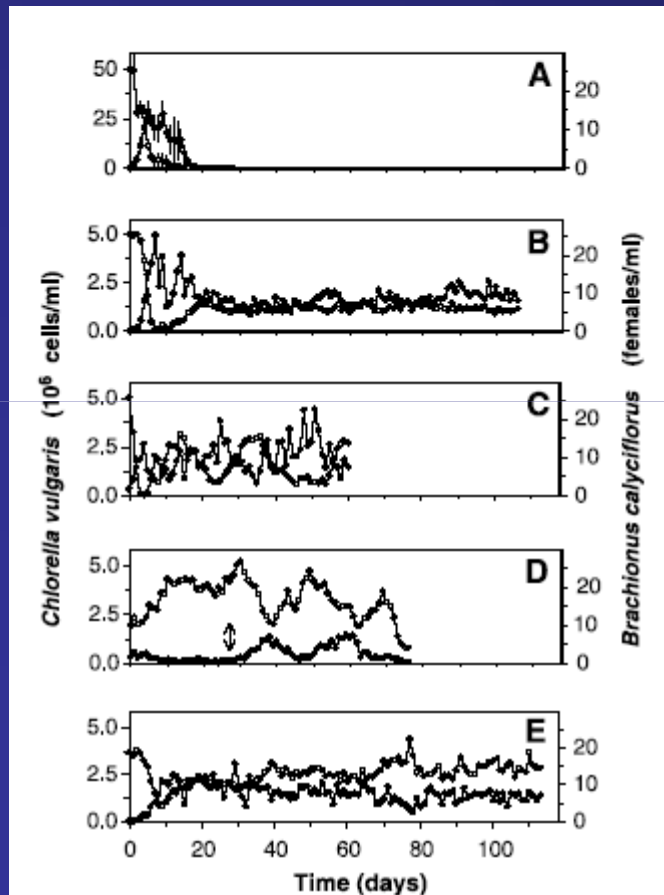
Linéarisation = Systèmes différentiels linéaires

Mathématiques

Comportement dynamique : constant, périodique, **complexe ?**

- sensibilité aux conditions initiales (SCI)
 - Exposant de Lyapunov positif
 - Non prédictibilité
- attracteur de dimension fractale (dimension de corrélation)
 - Comportement erratique des solutions du système différentiel

Données : séries chronologiques



Changement de
comportement qualitatif
Bifurcations

D'après Fusham *et al.*,
1999

Données :
Séries
chronologiques

Mathématiques :
Équations
différentielles, ...

Analyse de Fourier,
Autocorrélation,
dimension de
plongement, etc.

Analyse de stabilité,
SCI, exposant de
Lyapunov, dimension
d'attracteurs, etc.

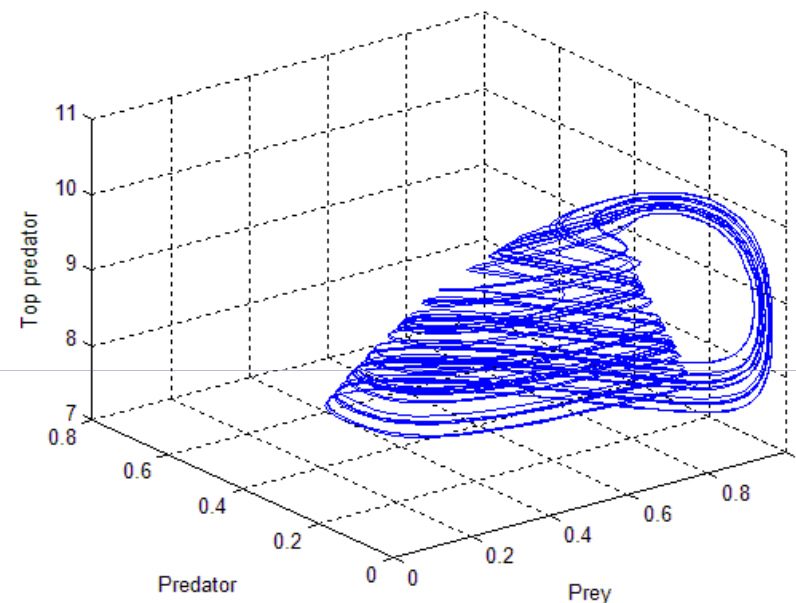
Modélisation

Exemples de modèles déterministes présentant du chaos :
les chaînes trophiques

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{aN}{1+bN} P$$

$$\frac{dP}{dt} = e \frac{aN}{1+bN} P - \mu P - \frac{cP}{1+dP} Z$$

$$\frac{dZ}{dt} = \varepsilon \frac{cP}{1+dP} Z - mZ$$



$$r=1; K=1;$$

$$a=5; b=3; e=1; \mu=0.4;$$

$$c=0.1; d=2; \varepsilon=1; m=0.01;$$

Analyse de la quantification de récurrences

Vol. 242: 29–37, 2002

MARINE ECOLOGY PROGRESS SERIES
Mar Ecol Prog Ser

Published October 25

Recurrence quantification analysis as a tool for characterization of non-linear mesocosm dynamics

Joachim W. Dippner^{1,*}, Reinhard Heerkloss², Joseph P. Zbilut³

¹Institut für Ostseeforschung, Warnemünde, Seestr. 15, 18119 Rostock, Germany

²Institut für Aquatische Biologie, Universität Rostock, Albert-Einstein-Str. 3, 18051 Rostock, Germany

³Department of Molecular Biophysics and Physiology, Rush Medical College, 1653 W. Congress, Chicago, Illinois 60612, USA

Les points récurrents

they make no mathematical assumptions. Given a reference point, \mathbf{X}_0 , and a ball, B_r , of radius r , a point is said to recur if:

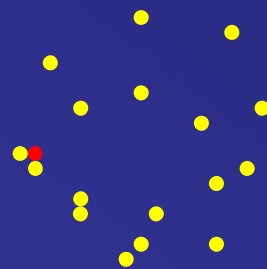
$$B_r(\mathbf{X}_0) = \{\mathbf{X} : \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| \leq r\} \quad (1)$$

A trajectory of size N falling within $B_r(\mathbf{X}_0)$ is denoted as:

$$S_1 = \{\mathbf{X}_{t_1}, \mathbf{X}_{t_2}, \dots, \mathbf{X}_{t_i}, \dots\} \quad (2)$$

with the recurrence times defined as:

$$T_1(i) = t_{i+1} - t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$



Attention : C'est la définition de la boule de centre X_0 et de rayon r , non d'un point récurrent

Diagramme de récurrences

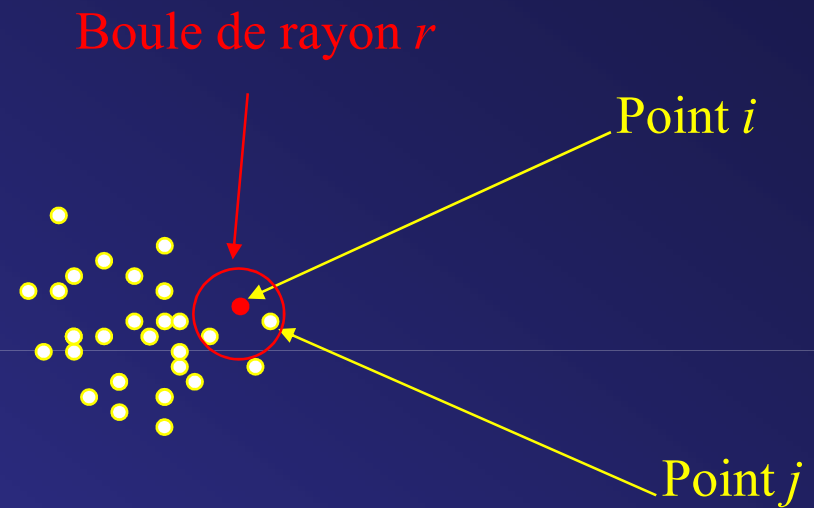
$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \vdots \\ X_{p+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ \vdots \\ X_{p+2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{N-p+1} \\ X_{N-p+2} \\ X_{N-p+3} \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}$$

$N-p+1$ points dans \mathbb{R}^p

Diagramme de récurrences

$$\begin{pmatrix} a_{n-p+1,1} & & & a_{n-p+1,n-p+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-p+1} \end{pmatrix}$$



$$a_{ij} = a_{ji} = 1$$

Diagramme de récurrences

Cas des systèmes déterministes :

si le point i et le point j sont proches, alors les points $i+1$ et $j+1$ ne peuvent pas être trop éloignés !

**APPARITION DE STRUCTURES OBLIQUES,
PARALLELES A LA BISSECTRICE PRINCIPALE**

L'absence de telles structures signifie une forte importance des phénomènes aléatoires.

Diagramme de récurrences

Les structures et la quantification

1 – Le pourcentage de récurrence : nombre de points récurrents rapporté au nombre total de points (=proportion de points noirs).

2 – Le pourcentage de déterminisme : nombre de points récurrents qui forment des morceaux de diagonales (hors diagonale principale), rapporté au nombre total de points

3 – L'entropie de Shannon :

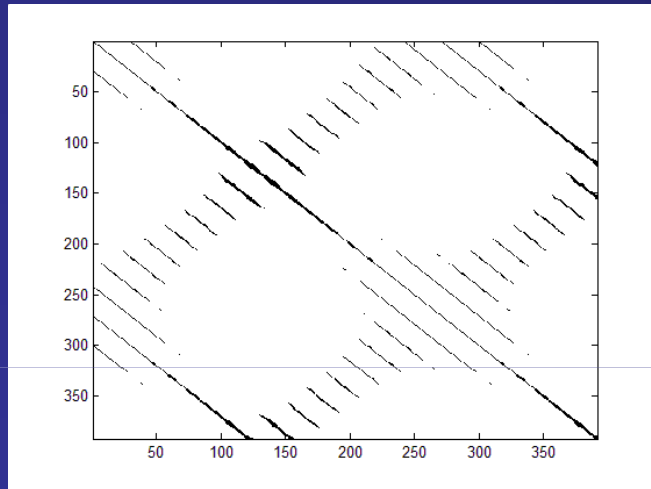
$$I = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$$

4 – La tendance : elle quantifie le palissement des points récurrents observé lorsqu'on s'éloigne de la diagonale et donne donc une mesure de la non stationnarité décrite par le diagramme de récurrence.

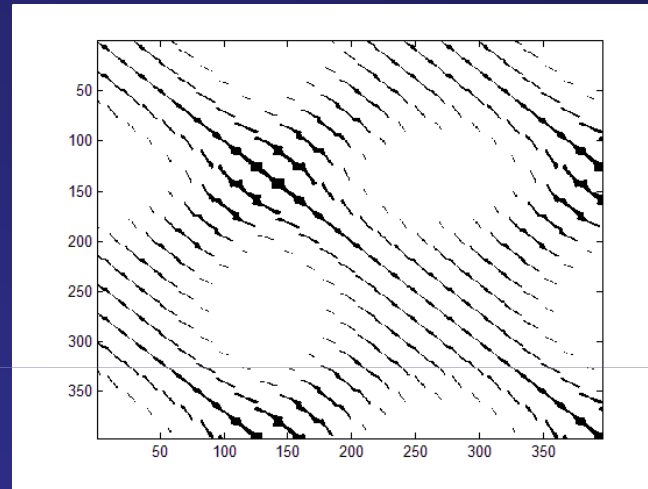
5 – La longueur maximale des lignes diagonales : elle donne une mesure de la sensibilité aux conditions initiales, elle est inversement proportionnelle à l'exposant de Lyapounov.

Diagramme de récurrences

... et dimension de plongement.

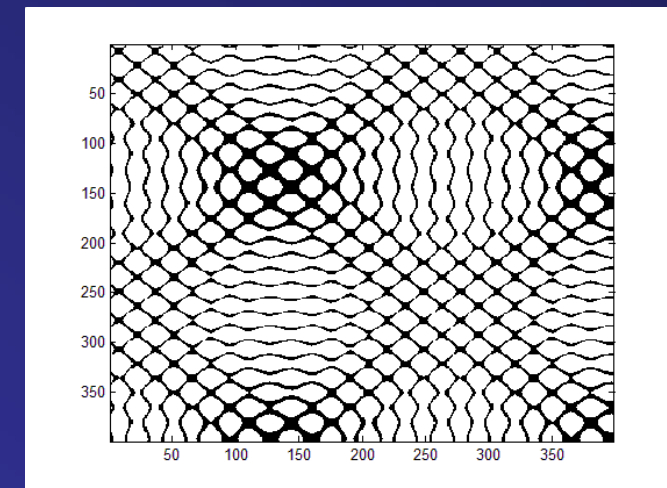


$p=10$



$p=5$

...



$p=2$

Diagramme de récurrences

... et dimension de plongement.

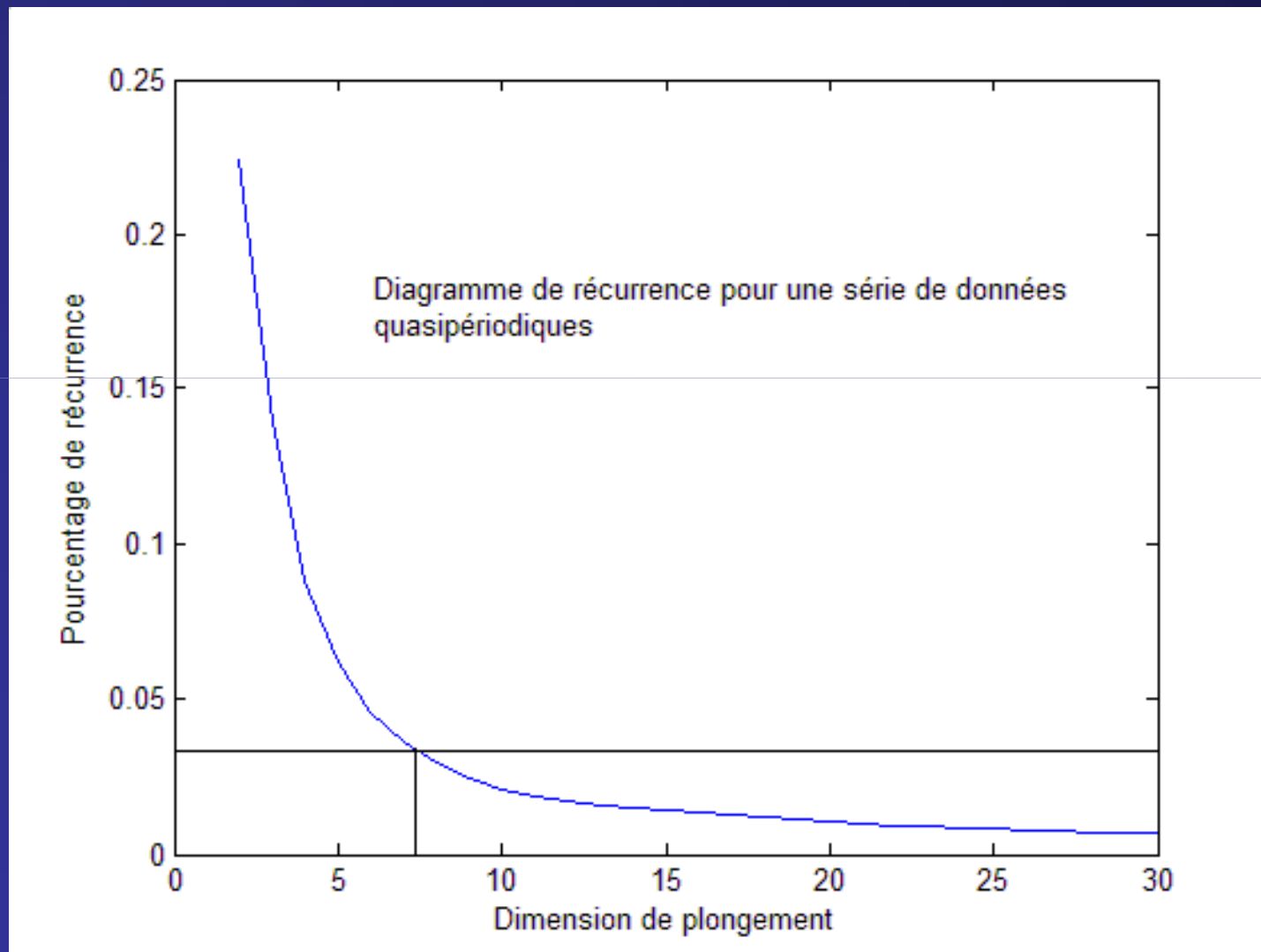
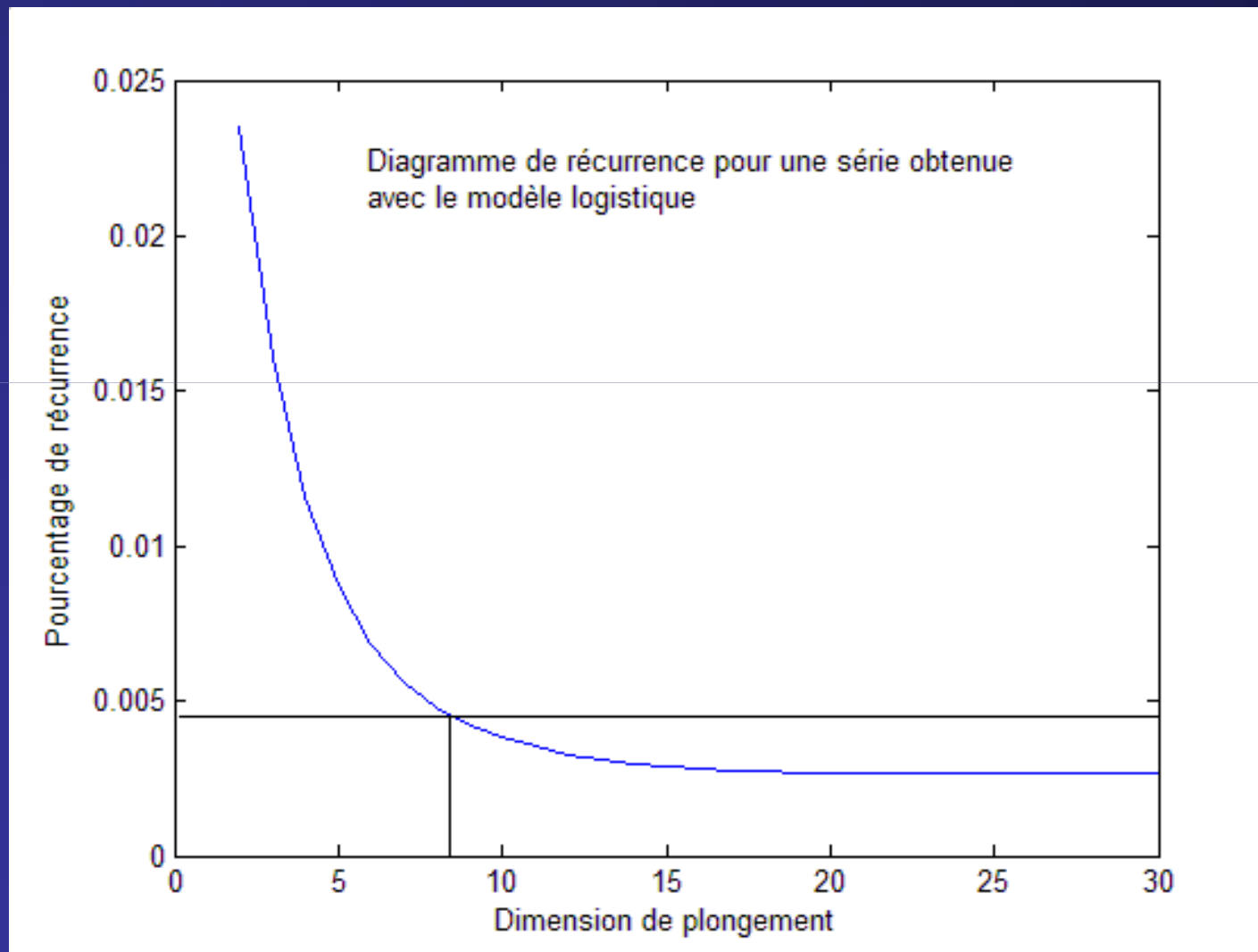


Diagramme de récurrences

... et dimension de plongement.



Effet du choix de r

Le log d'un %
devrait être
inférieur à 0.

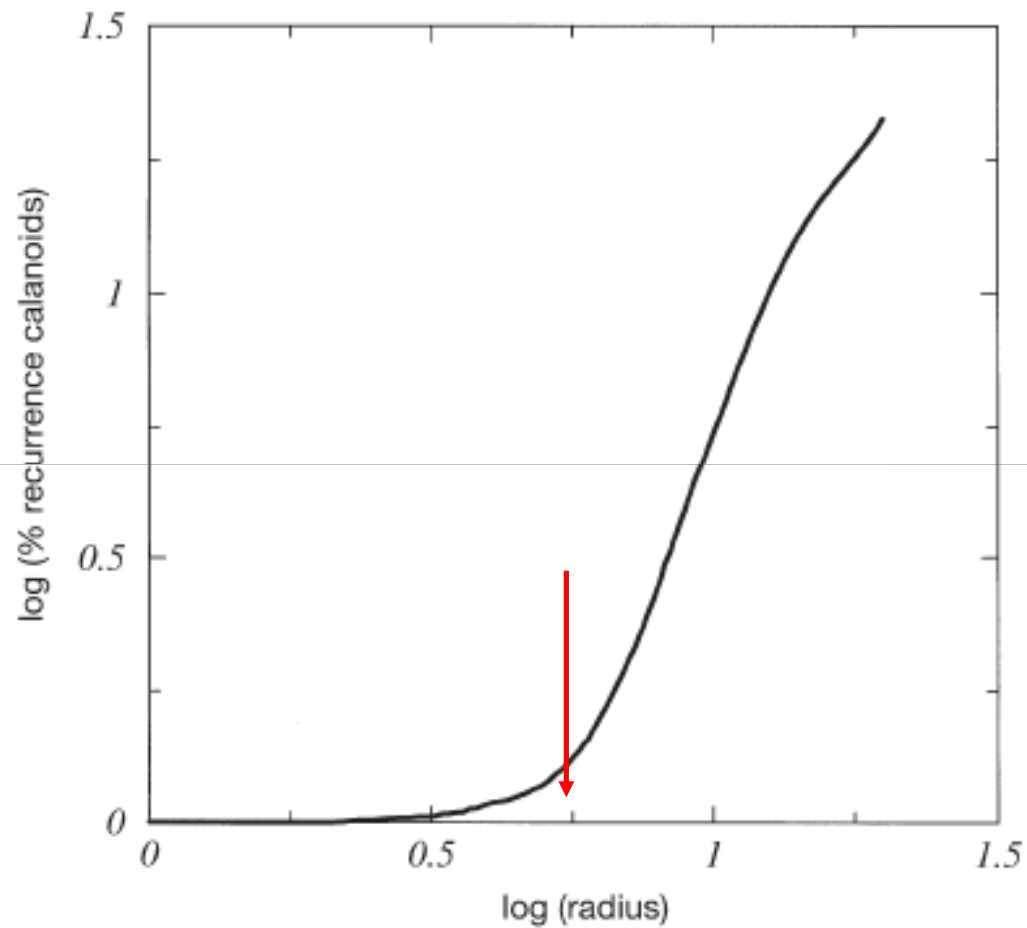
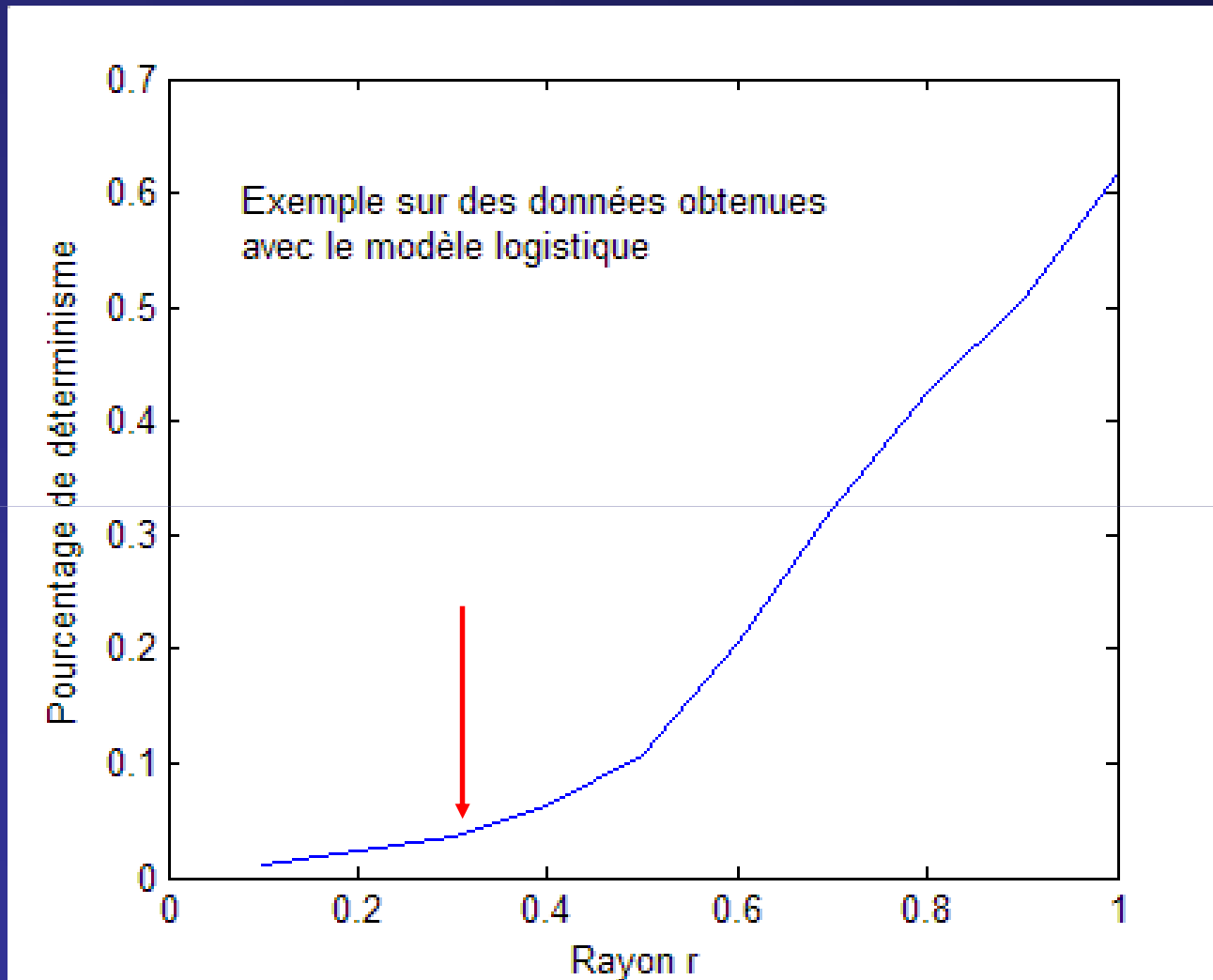
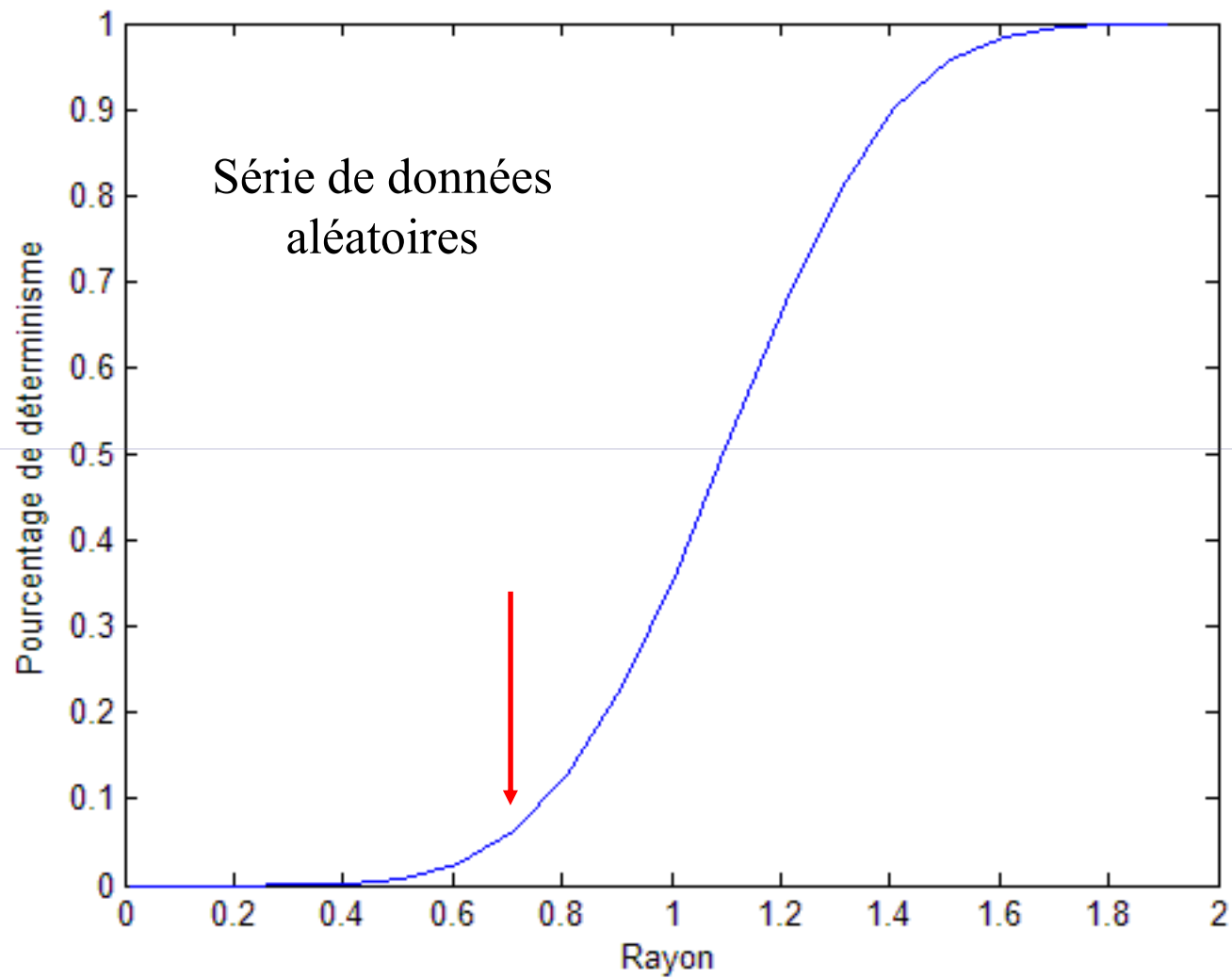


Fig. 2. Logarithm of percent recurrence of calanoids as function of the logarithm of radius

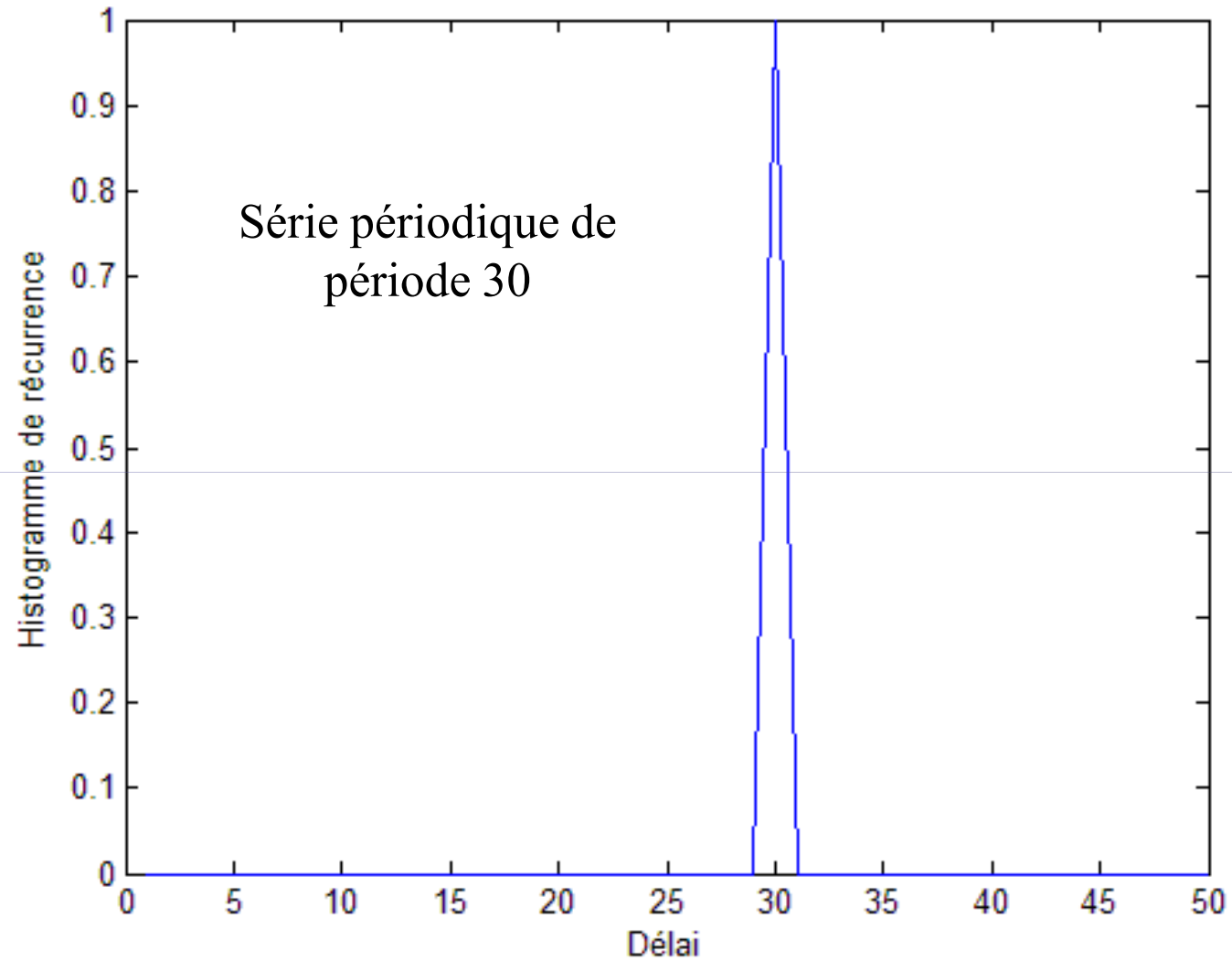
Effet du choix de r



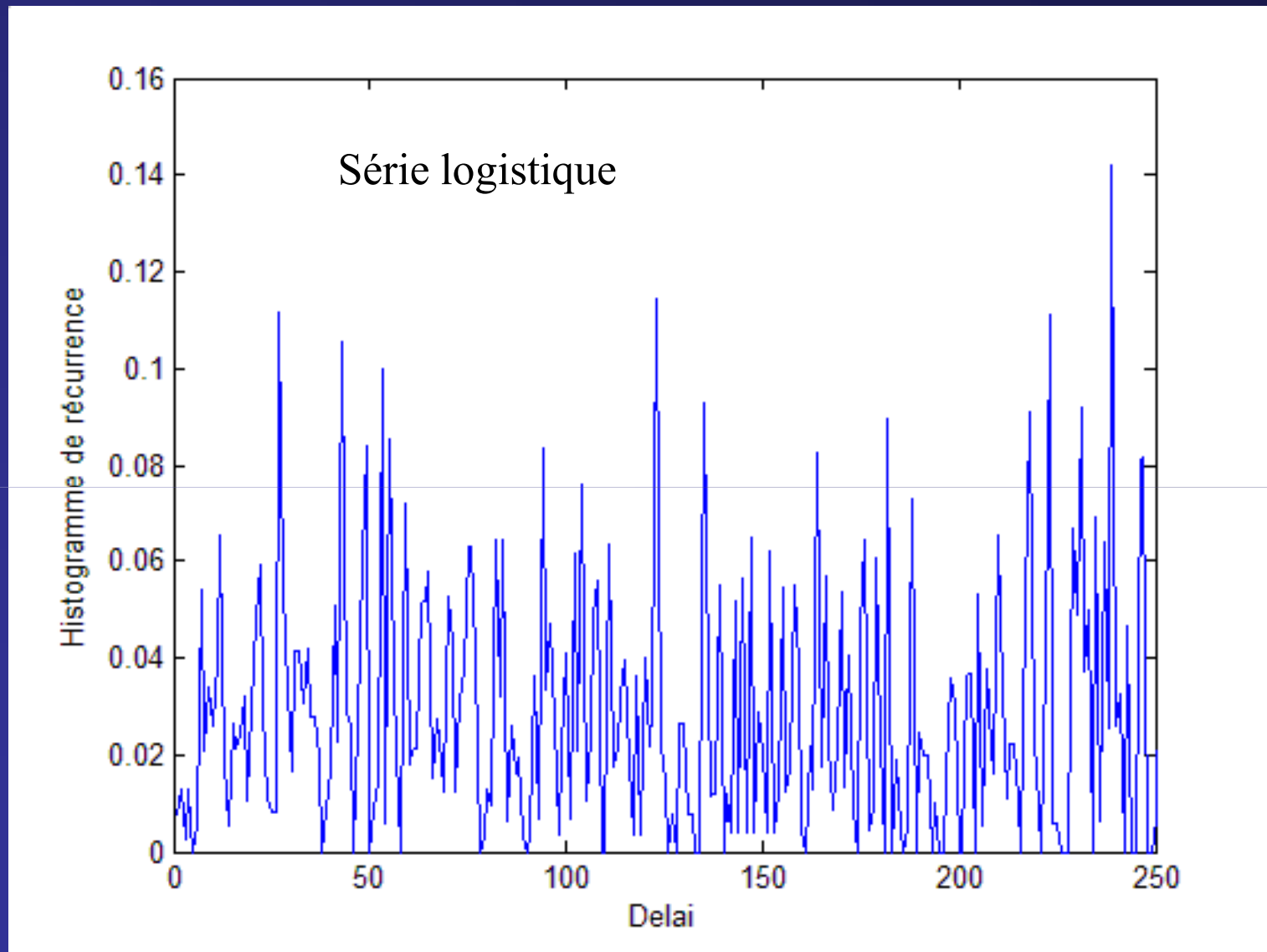
Effet du choix de r



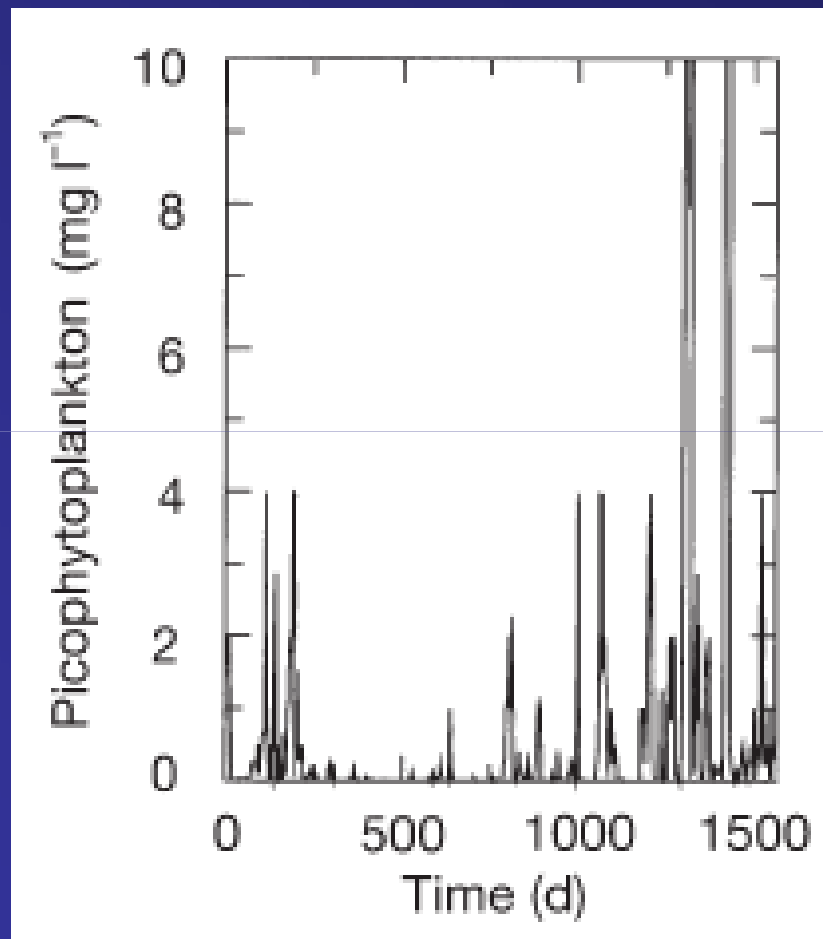
Histogramme de récurrences



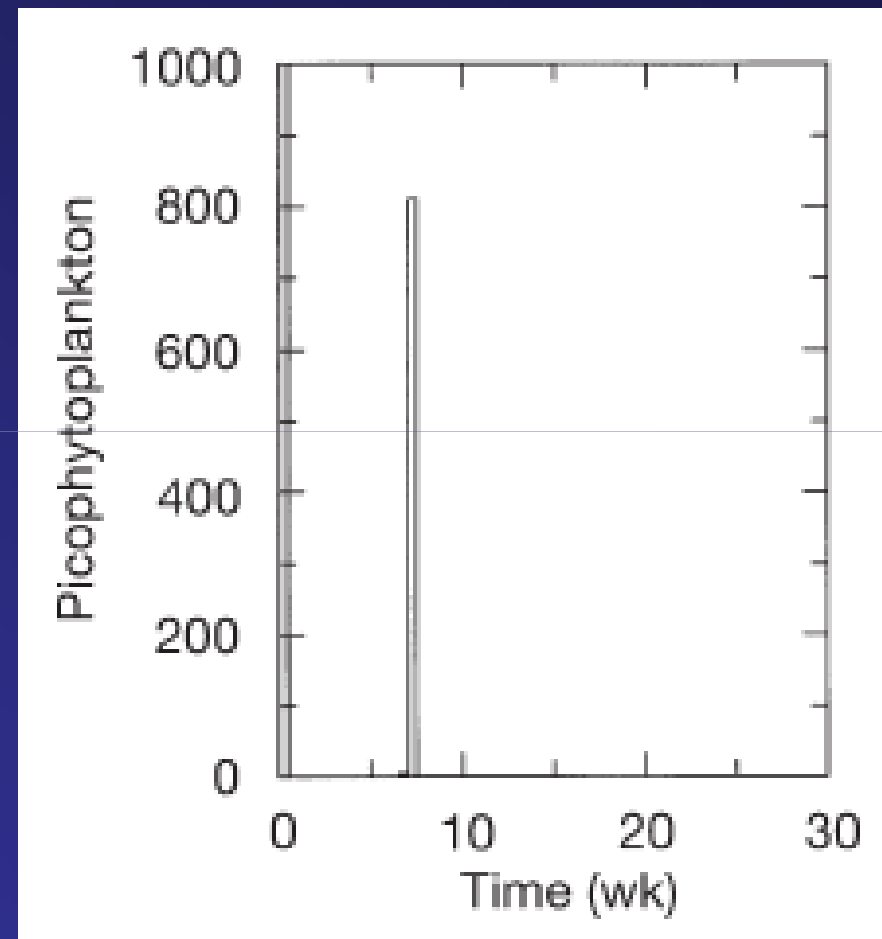
Histogramme de récurrences



Histogramme de récurrences pour le picophytoplancton

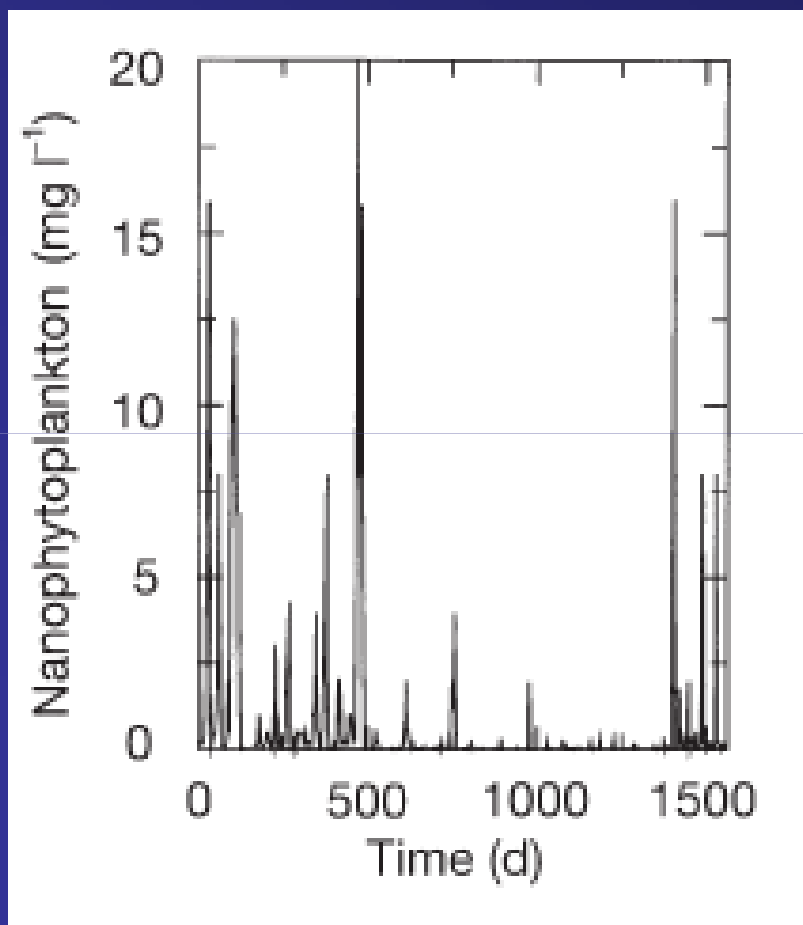


Série initiale

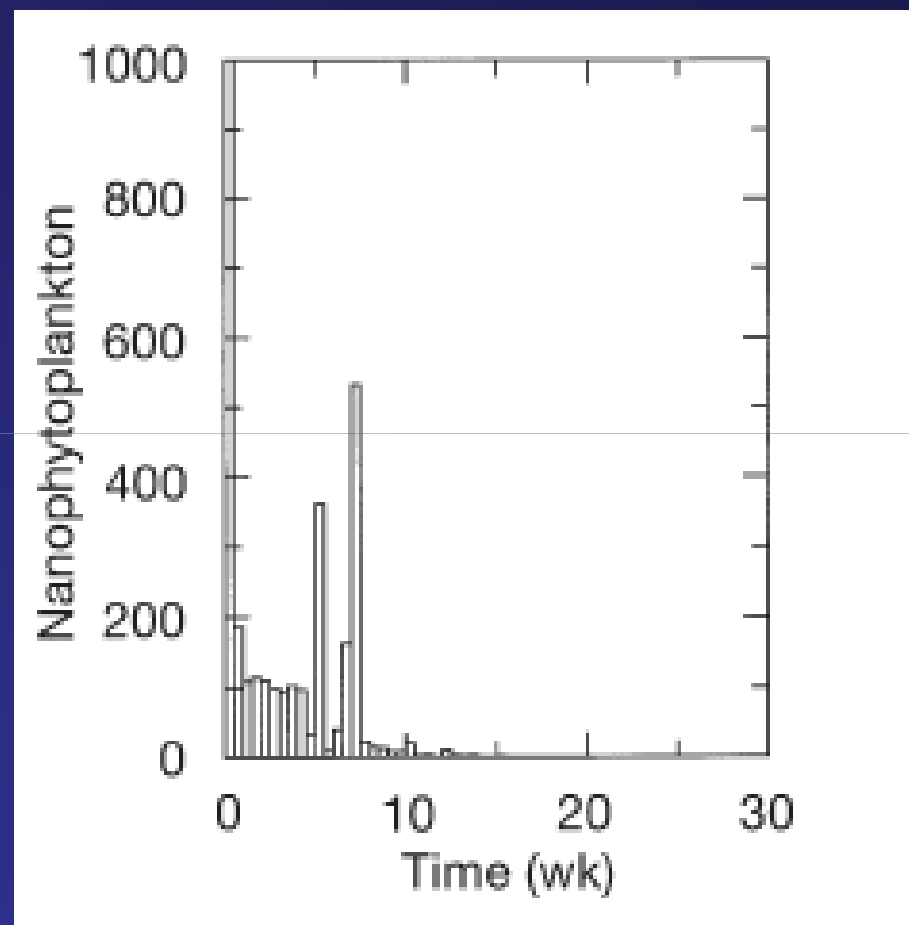


Histogramme

Histogramme de récurrences pour le nanophytoplancton

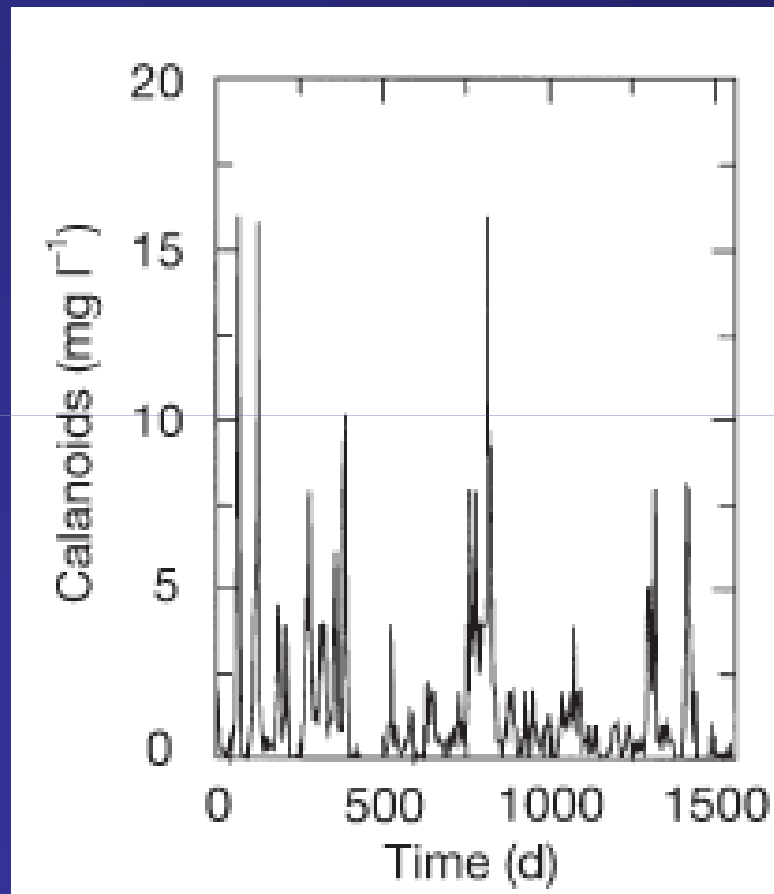


Série initiale

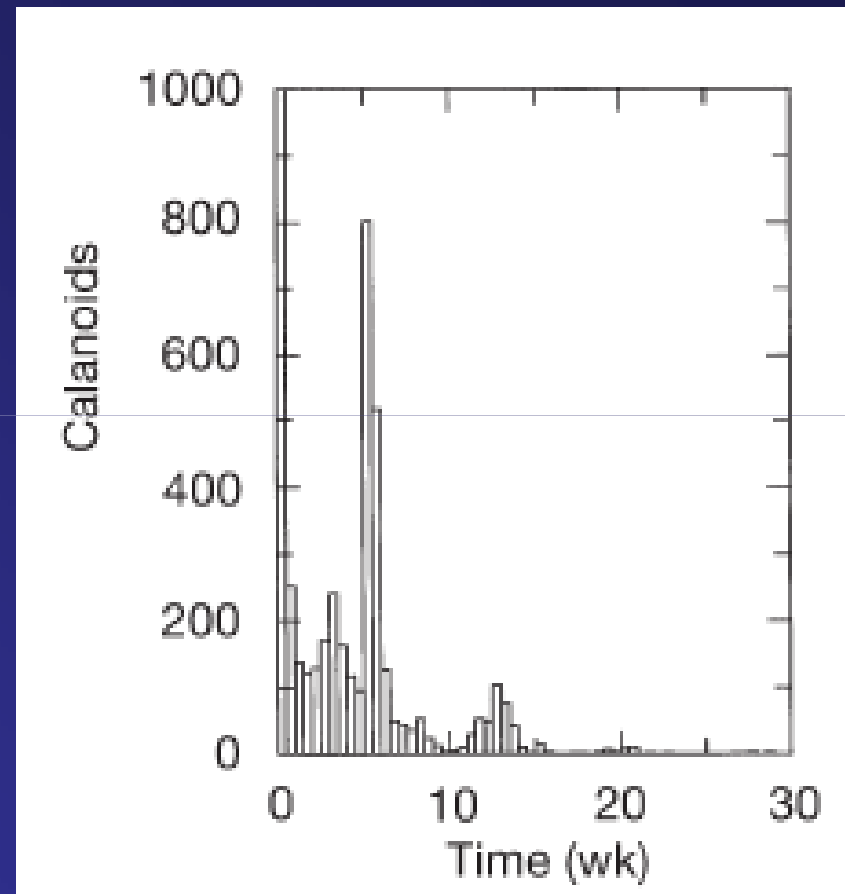


Histogramme

Histogramme de récurrences pour les calanoïdes

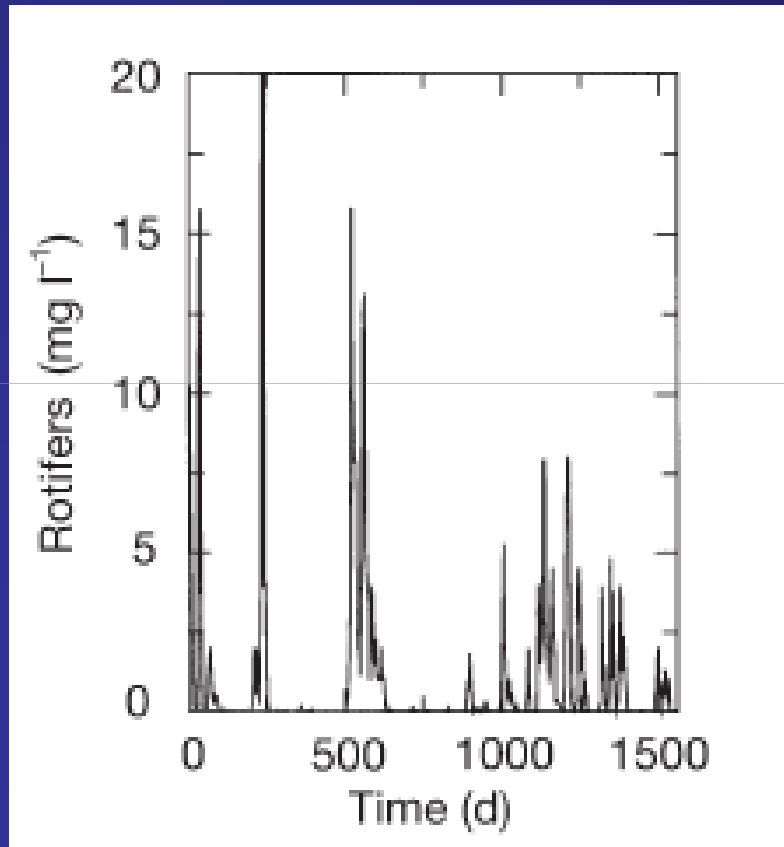


Série initiale

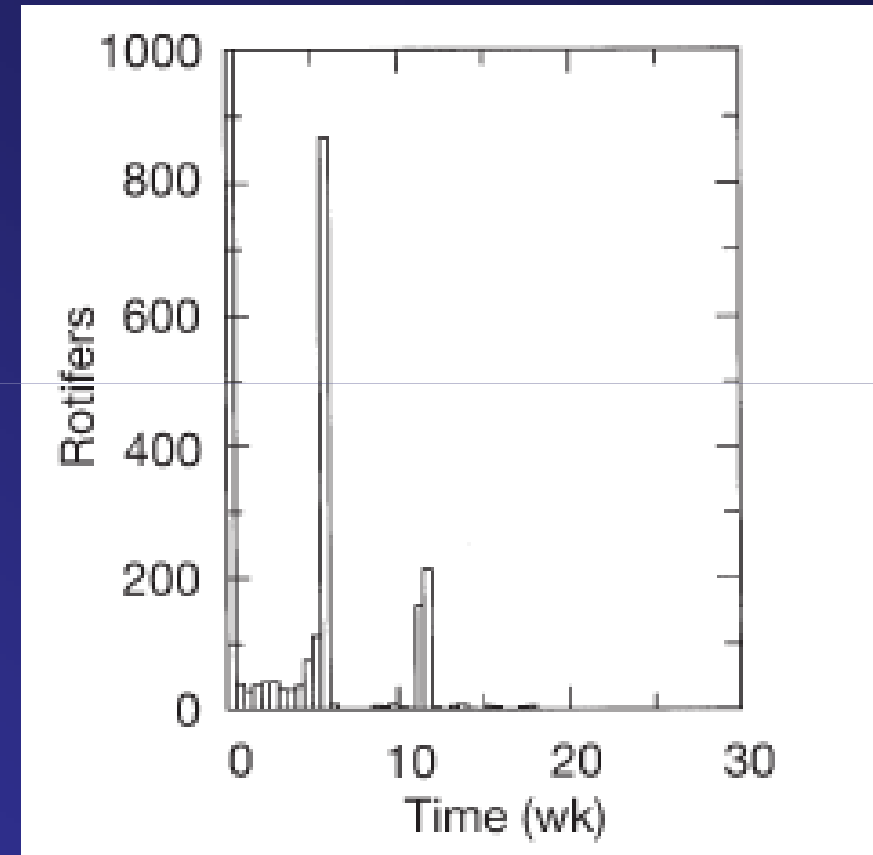


Histogramme

Histogramme de récurrences pour les rotifères



Série initiale



Histogramme

Diagramme de récurrences pour le picophytoplancton

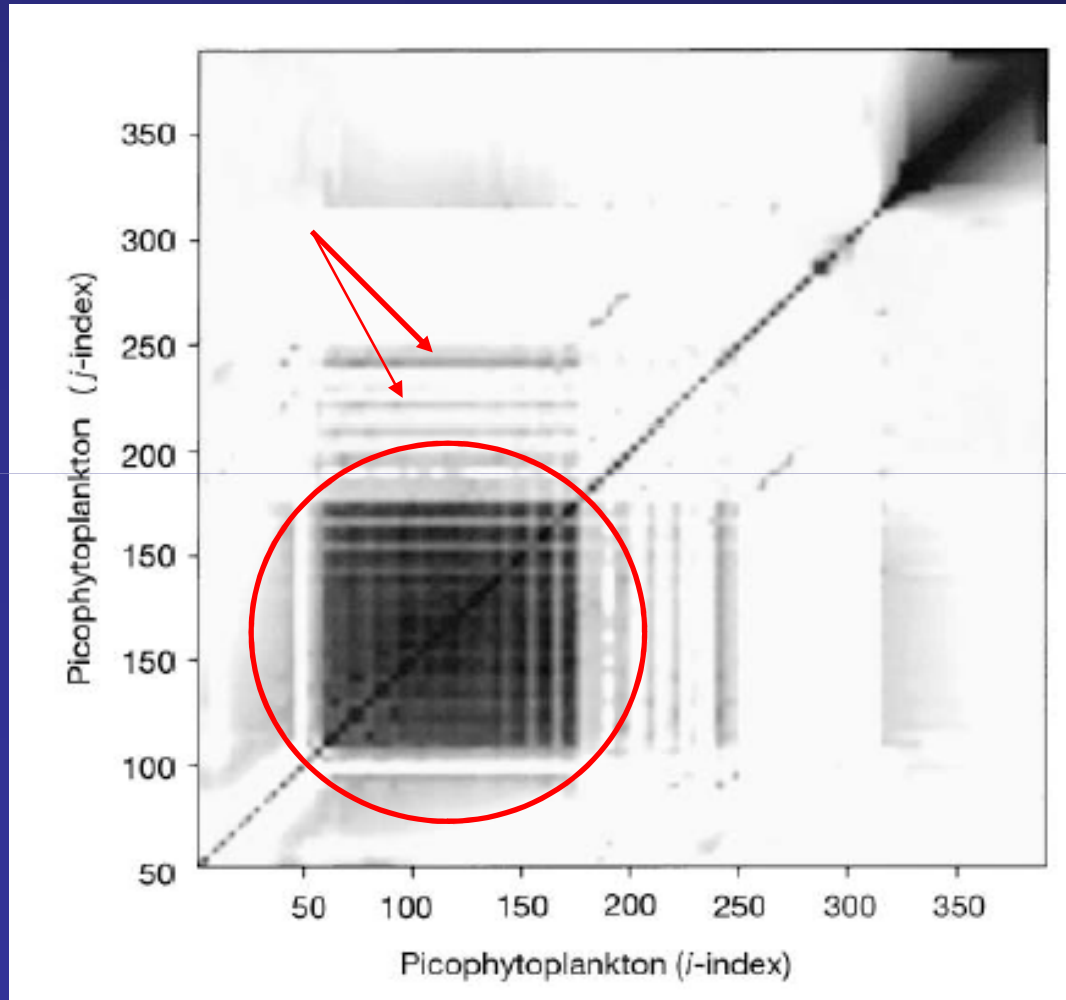
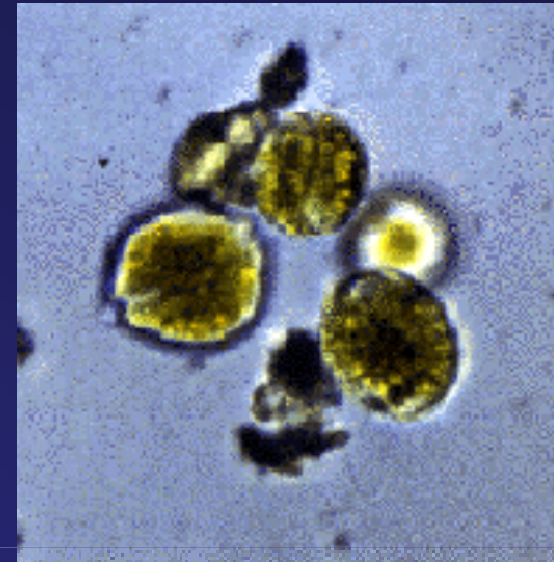
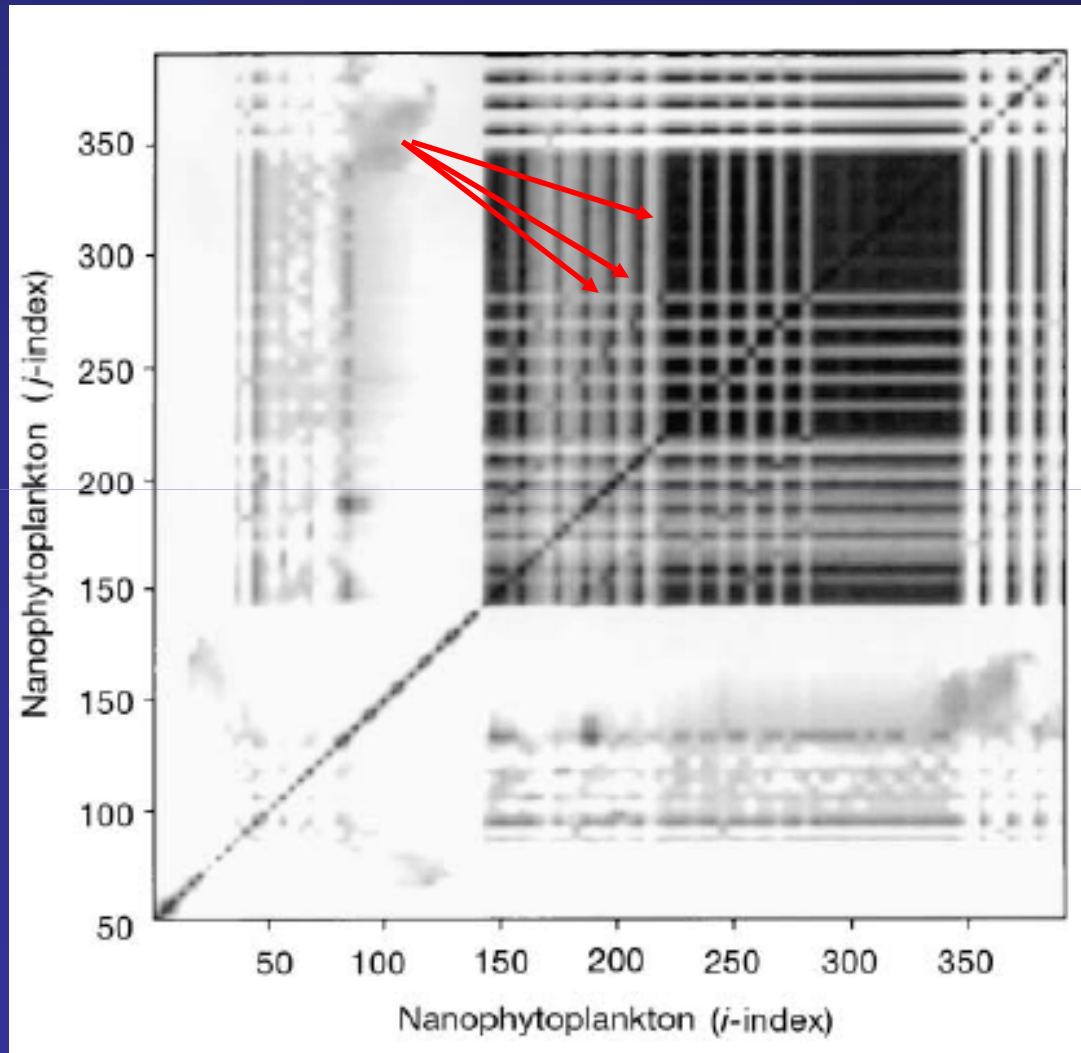
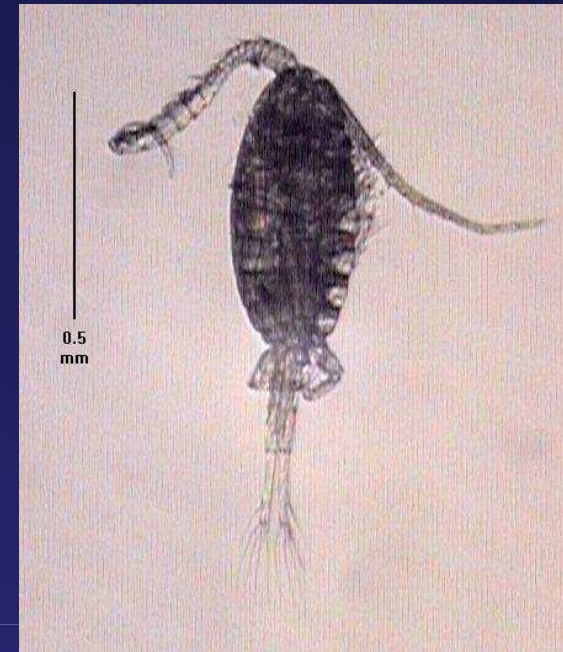
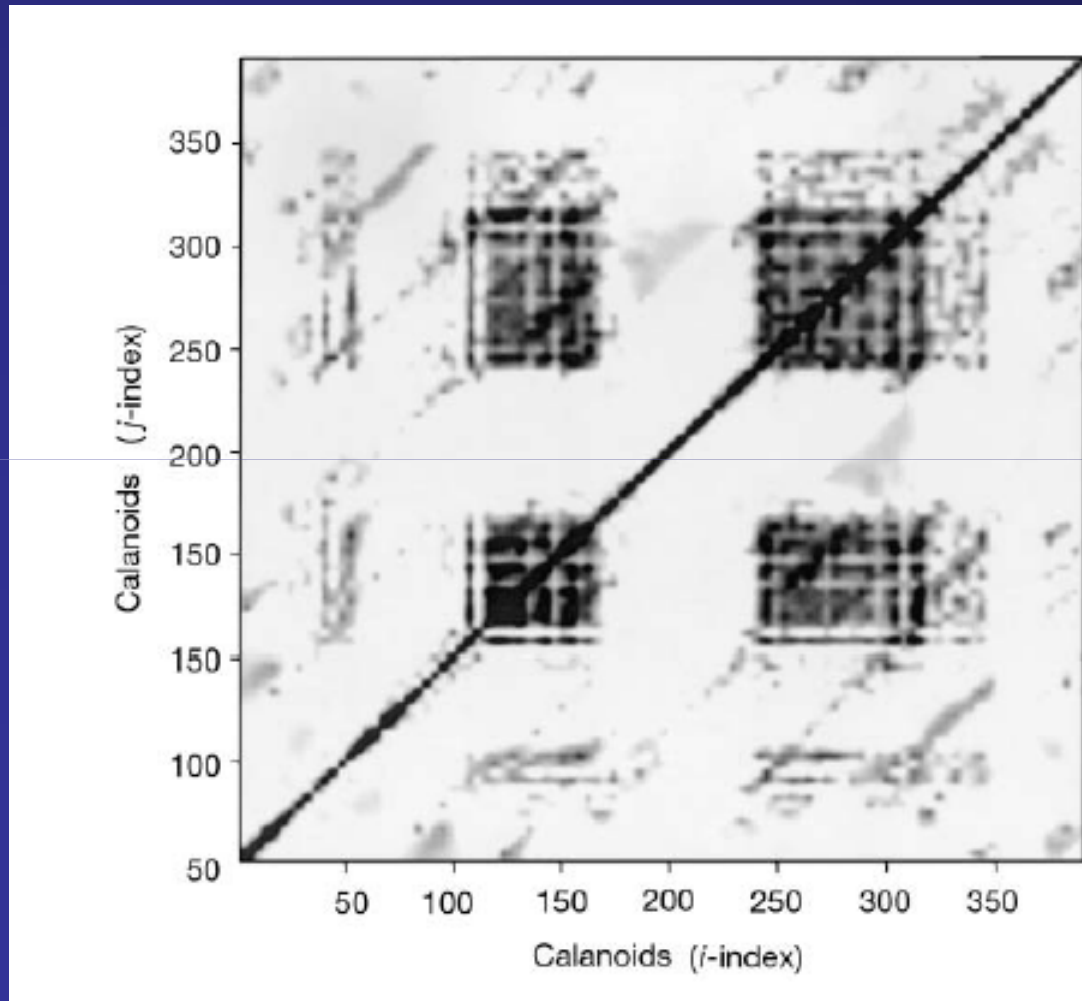


Diagramme de récurrences pour le nanophytoplancton



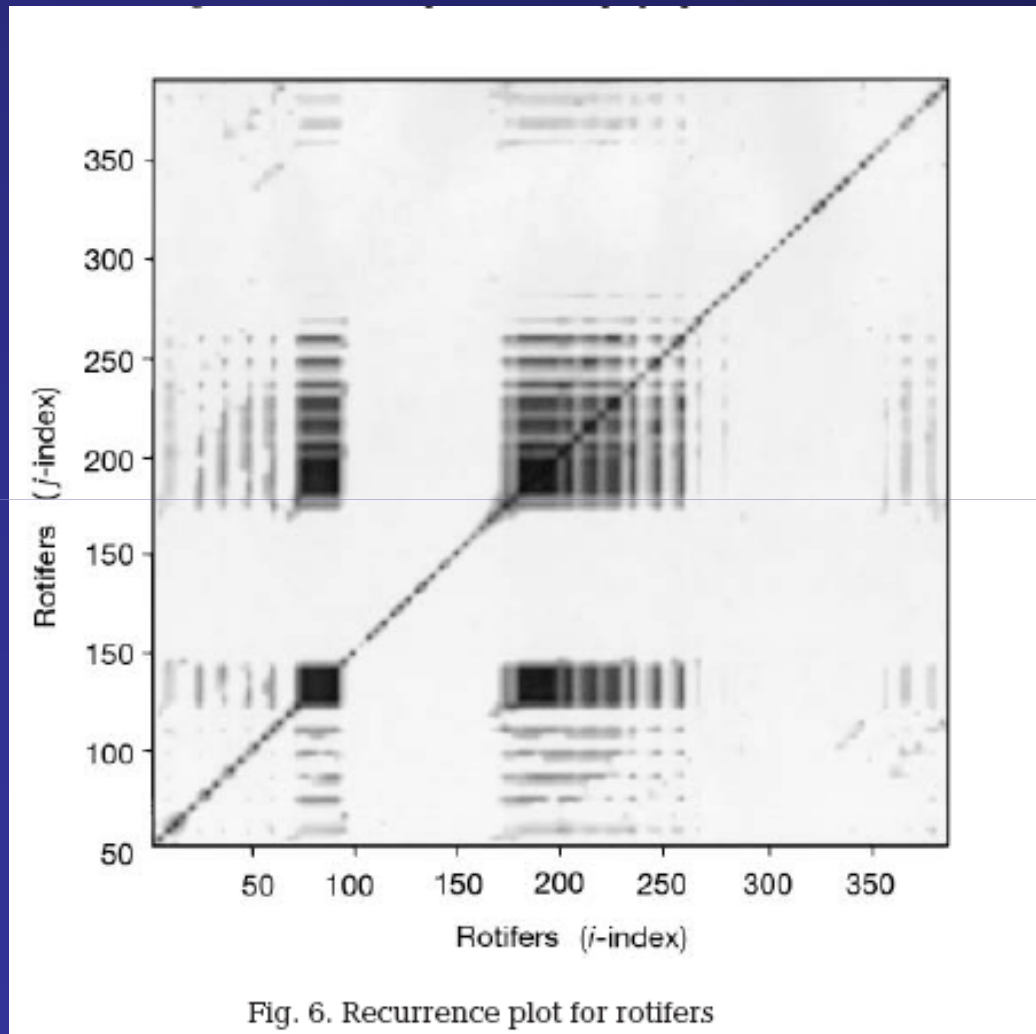
dinoflagellates

Diagramme de récurrences pour les calanoïdes



Eurytemora affinis

Diagramme de récurrences pour les rotifères



*Brachionus
angularis*