Master d'Océanographie - Biologie et Ecologie Marines
UE BEM354 - Systèmes dynamiques pour les Sc. de l'Environnement
Année 2010 - 2011

Sujet d'examen - Décembre 2010
Durée : 3h00

Question de cours : On considère un système de la forme :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

où $x_t \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On définit l'expression :

$$\alpha = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \log(|f'(x_t)|) \tag{1}$$

A quoi correspond ce nombre ? Que mesure-t-il ? Interpréter précisément l'expression (1).

Exercice 1 : On considère un système de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu) \tag{2}$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et μ est un paramètre réel. L'application F est $\mathcal{C}^1$ par rapport à X et par rapport à μ. On suppose que ce système admet, pour chaque μ, une orbite périodique notée γ_μ. On considère une section de Poincaré notée Σ, sur laquelle l'application retour de Poincaré P_μ est définie. La section de Poincaré est paramétrée par x et on note x_0 la position de l'intersection entre Σ et γ_μ (on peut toujours supposer que x_0 ne dépend pas de μ quitte à redéfinir la paramétrisation de Σ).

1) Pour une valeur fixée de $\mu < 0$, on suppose que l'orbite périodique est stable. Comment caractériser cette hypothèse au moyen de P_μ ?

2) On suppose que l'orbite périodique est stable pour tout $\mu < 0$ et instable pour tout $\mu > 0$. Comment cela se traduit-il au niveau des valeurs propres de $DP_0(x_0)$?

3) On suppose qu'une valeur propre de $DP_0(x_0)$ est égale à 1. Comment cela se traduit - il sur le comportement des trajectoires du système (2) au voisinage de l'orbite périodique γ_μ lorsque $\mu > 0$ et petit.

4) Quelle équation, utilisant P_μ permet de caractériser une orbite périodique de période deux fois plus grande que celle de γ_μ ? Comment caractériser la stabilité d'une telle orbite périodique de période double ?

Exercice 2 : On considère le système défini par :

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{3}$$

où $f(x) = ax\exp(-bx)$, a et b sont deux réels positifs et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

2) On suppose que $x \in [0; 1]$, donner une condition sur les paramètres a et b pour que $f(x) \in [0, 1]$.

3) Déterminer les équilibres du modèle (3).

4) Etudier la stabilité des équilibres déterminés dans la question précédente.

5) Quel type de bifurcation a-t-on lorsque $a = \exp(2)$? Quelle est la valeur minimale de b pour que cette bifurcation puisse se produire tout en conservant l'application f de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$?

6) La figure (1) montre le diagramme de bifurcation de ce système en fonction du paramètre a pour b fixé. Interpréter ce diagramme.

7) La figure (2) représente l'exposant de Lyapunov de ce système en fonction du paramètre a pour b fixé. Que nous apprend-il ? Quelles sont les relations entre cette figure et la figure (1) ?

8) La figure (3) présente sur le même graphique, la fonction f, la fonction $f \circ f$ et la fonction $f \circ f \circ f \circ f$. Que nous apprend ce graphique ? A quel mécanisme de formation de la dynamique chaotique permet-il de penser ?

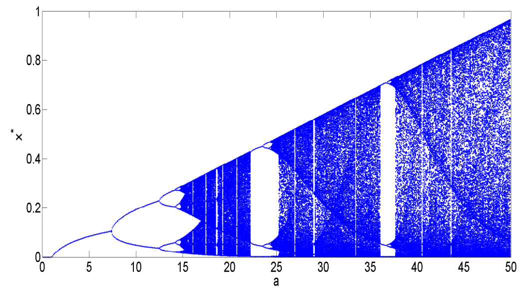

FIGURE 1 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre a.

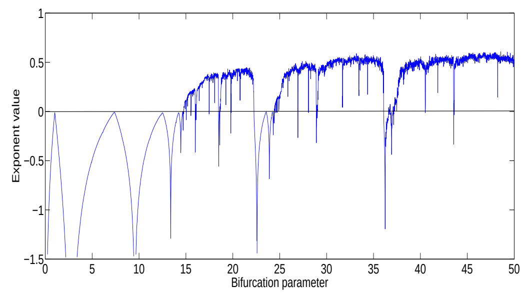

FIGURE 2 – Exposant de Lyapunov.

Exercice 3 : On considère le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = y + x(\mu - x^2 - y^2) \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y(\mu - x^2 - y^2) \quad (5)$$

On propose de changer de système de coordonnées en passant aux coordonnées polaires (r, θ) :

$$x = r\cos(\theta) \quad (6)$$

$$y = r\sin(\theta) \quad (7)$$

1) Exprimer r en fonction de x et y. En déduire $\frac{dr}{dt}$.
2) Exprimer θ en fonction de x et y. En déduire $\frac{d\theta}{dt}$
3) Montrer que le système différentiel (4) admet un cycle limite stable quand $\mu > 0$. Quel est le rayon de ce cycle limite ?
4) A quel type de bifurcation cela correspond-t-il ? Tracer le diagramme de bifurcation.

Exercice 4 : La figure (4) présente 6 séries temporelles associées à des grandeurs biogéochimiques observées et la figure (5) montrent 6 diagrammes de récurrence ayant été construits à partir de ces observations. Yoan a malencontreusement fait tomber la boite qui contenait les diagrammes de récurrence, qui se sont mélangés. Pour ne pas se faire disputer par son directeur de thèse, il doit ré-attribuer chaque diagramme à la série temporelle qui a permis de le construire. Peux-tu l'aider ? Prends-soin de bien lui expliquer tes choix.

N.B. : Toute ressemblance avec des personnages ou des faits ayant réellement existé serait purement fortuite.

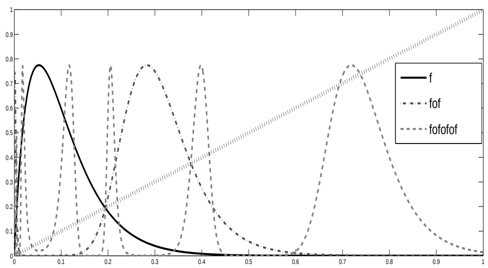

FIGURE 3 – Représentation graphique de f, fof et $fofof$.

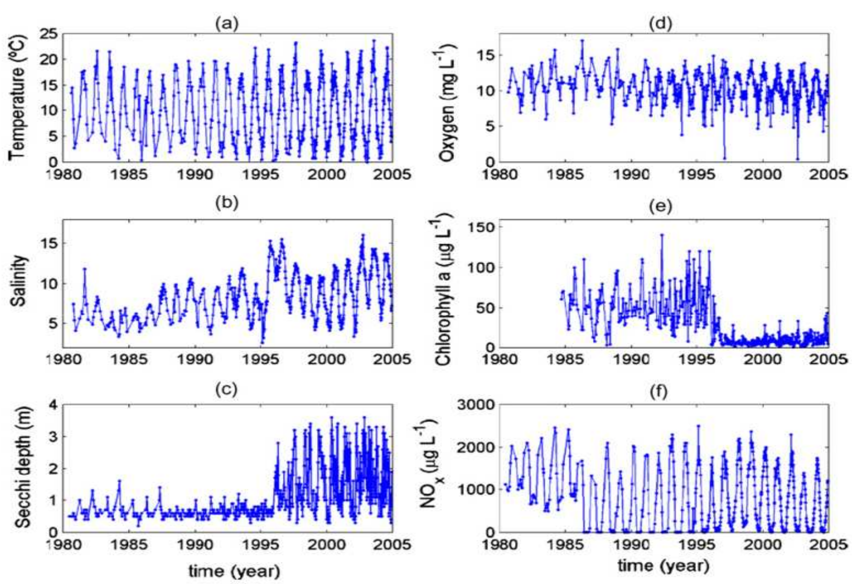

FIGURE 4 – Séries temporelles de température (a), salinité (b), turbidité (c), oxygène (d), chlorophylle (e), nutriment azoté (f).

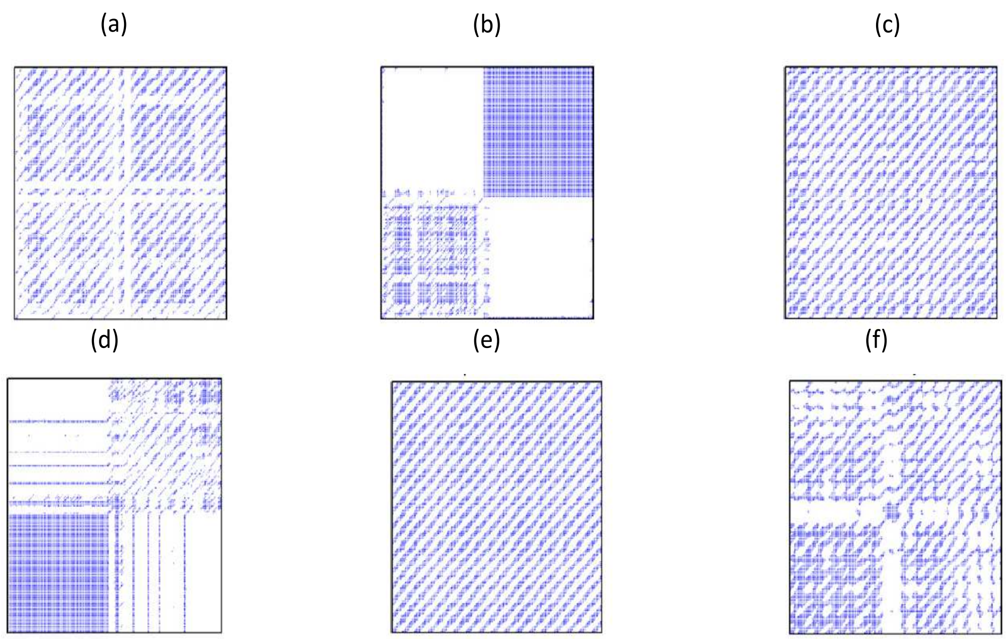

FIGURE 5 – Diagrammes de récurrence obtenus à partir des séries de la figure (4), mélangés.