Master d'Océanographie - Spécialité : Biologie et Ecologie Marines
UE BEM307 - Systèmes dynamiques pour les Sc. de l'Environnement
Année 2012 - 2013

Sujet d'examen - Décembre 2012
Durée : 3h00

Exercice 1 : On considère l'application :

$$f(x) = \frac{ax}{1 + bx^4} \tag{1}$$

pour $x \geq 0$ et avec $a > 0$ et $b > 0$.

1) Calculer la dérivée f' de f et montrer que cette dérivée s'annule si et seulement si $x = (\frac{1}{3b})^{\frac{1}{4}}$.

2) Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Tracer un le graphe de la fonction f qualitativement.

3) Montrer que le modèle (1) admet deux équilibres dont l'équilibre positif $\bar{x} = (\frac{a-1}{b})^{\frac{1}{4}}$.

4) Quelles sont les conditions sur les paramètres a et b pour que l'équilibre positif précédent existe et soit stable ?

5) On s'intéresse au système dynamique défini par $x_{t+1} = f(x_t)$. La Figure (1) représente le diagramme de bifurcation de ce système pour a compris entre 0 et 10 et $b = 0.1$. Interprétez ce diagramme.

6) Tracer qualitativement l'exposant de Lyapounov en fonction de a pour a compris entre 0 et 4.

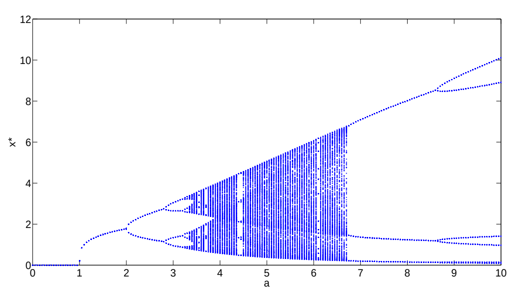

Figure 1 – Diagramme de bifurcation.

Exercice 2 : On considère une série d'observations indicées par le temps, ce qu'on notera par $\{x_t\}_{t \in \{1, \cdots, N\}}$. On souhaite utiliser cette série temporelle pour reconstruire un attracteur dans un espace de phase de dimension p fixé arbitrairement, $p \geq 2$. On suppose qu'il n'y a pas eu de suréchantillonnage. Comment peut-on procéder ? Combien de points obtiendrons nous dans l'espace des phases ? Quelle méthode pouvons-nous utiliser pour estimer la dimension de l'attracteur ? Quel critère pouvez-vous suggérer pour déterminer une valeur de p pertinente ?

Exercice 3 : On considère le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = y + x(\mu - x^2 - y^2) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y(\mu - x^2 - y^2) \tag{3}$$

On propose de changer de système de coordonnées en passant aux coordonnées polaires (r, θ) :

$$x = r\cos(\theta) \tag{4}$$

$$y = r\sin(\theta) \tag{5}$$

1) Exprimer r en fonction de x et y. En déduire $\frac{dr}{dt}$.

2) Exprimer θ en fonction de x et y. En déduire $\frac{d\theta}{dt}$

3) Montrer que le système différentiel (2) admet un cycle limite stable quand $\mu > 0$. Quel est le rayon de ce cycle limite ?

4) A quel type de bifurcation cela correspond-t-il ? Tracer le diagramme de bifurcation.

Exercice 4 : On s'intéresse à un système dynamique de la forme $x_{t+1} = f(x_t)$ où la fonction f est représentée sur la Figure (2). En vous appuyant sur cette figure, donner le nombre d'équilibres de ce système et dire s'ils sont stables.

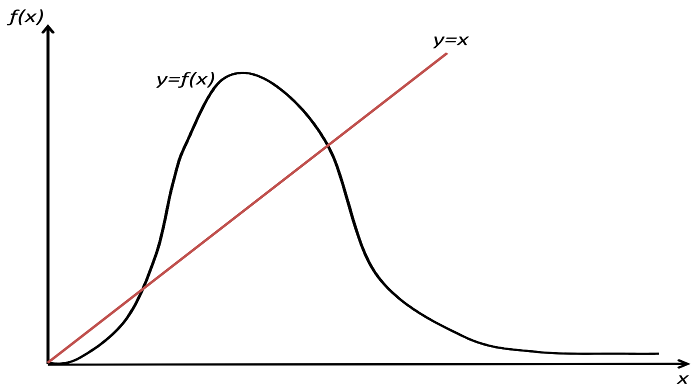

FIGURE 2 – Graphe de la fonction f.