Master d'Océanographie - Biologie et Ecologie Marines
UE BEM307 - Systèmes dynamiques pour les Sc. de l'Environnement
Année 2013 - 2014

Sujet d'examen - Décembre 2013 - Session 1
Durée : 3h00

Questions de cours :
1) On dispose d'une série chronologique $(x_1, \cdots, x_N)$. Expliquer comment reconstruire l'attracteur associé dans l'espace des phases de manière complète et précise, en supposant qu'il n'y a pas de suréchantillonnage ; il faudra notamment détailler complètement la procédure permettant de déterminer la dimension de plongement.
2) Décrire la bifurcation obtenue par perte de stabilité d'une orbite périodique par passage d'une valeur propre de la jacobienne de l'application de Poincaré par la valeur 1.

Exercice 1 : Interpréter la figure suivante et en déduire quelques propriétés de la série temporelle dont elle est tirée.

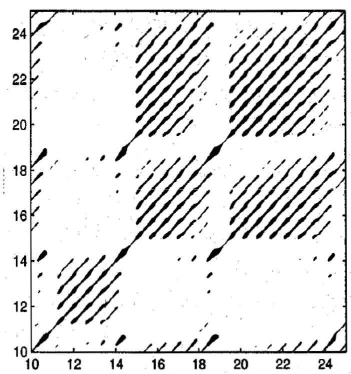

Figure 1 – Diagramme de récurrence.

Exercice 2 : On considère le système défini par :

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1}$$

où $f(x) = ax\exp(-bx)$, a et b sont deux réels positifs et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

2) On suppose que $x \in [0; 1]$, donner une condition sur les paramètres a et b pour que $f(x) \in [0, 1]$.

3) Déterminer les équilibres du modèle (1).

4) Etudier la stabilité des équilibres déterminés dans la question précédente.

5) Quel type de bifurcation a-t-on lorsque $a = \exp(2)$? Quelle est la valeur minimale de b pour que cette bifurcation puisse se produire tout en conservant l'application f de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$?

6) La figure (2) montre le diagramme de bifurcation de ce système en fonction du paramètre a pour b fixé. Interpréter ce diagramme.

7) La figure (3) représente l'exposant de Lyapunov de ce système en fonction du paramètre a pour b fixé. Que nous apprend-il ? Quelles sont les relations entre cette figure et la figure (2) ?

8) La figure (4) présente sur le même graphique, la fonction f, la fonction $f \circ f$ et la fonction $f \circ f \circ f \circ f$. Que nous apprend ce graphique ? A quel mécanisme de formation de la dynamique chaotique permet-il de penser ?

Exercice 3 : On considère un système de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu) \tag{2}$$

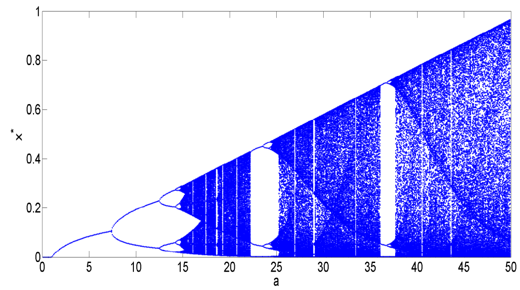

FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre a.

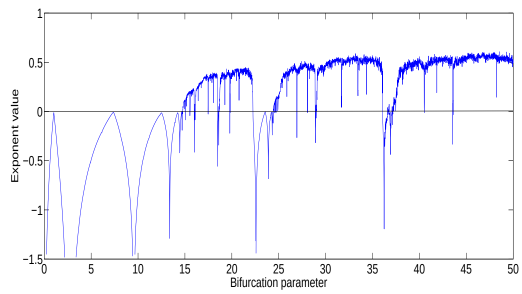

FIGURE 3 – Exposant de Lyapunov.

où $X \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et μ est un paramètre réel. L'application F est $\mathcal{C}^1$ par rapport à X et par rapport à μ. On suppose que ce système admet, pour chaque μ, une orbite périodique notée γ_μ. On considère une section de Poincaré notée Σ, sur laquelle l'application retour de Poincaré P_μ est définie. La section de Poincaré est paramétrée par x et on note x_0 la position de l'intersection entre Σ et γ_μ (on peut toujours supposer que x_0 ne dépend pas de μ quitte à redéfinir la paramétrisation de Σ).

1) Pour une valeur fixée de $\mu < 0$, on suppose que l'orbite périodique est stable. Comment caractériser cette hypothèse au moyen de P_μ ?

2) On suppose que l'orbite périodique est stable pour tout $\mu < 0$ et instable pour tout $\mu > 0$. Comment cela se traduit-il au niveau des valeurs propres de $DP_0(x_0)$?

3) On suppose qu'une valeur propre de $DP_0(x_0)$ est égale à 1. Comment cela se traduit - il sur le comportement des trajectoires du système (2) au voisinage de l'orbite périodique γ_μ lorsque $\mu > 0$ et petit.

4) Quelle équation, utilisant P_μ permet de caractériser une orbite périodique de période deux fois plus grande que celle de γ_μ ? Comment caractériser la stabilité d'une telle orbite périodique de période double ?

Exercice 4 : On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \tag{3}$$

Construire le diagramme de bifurcation. De quelle bifurcation s'agit - il ? Donner un exemple de modèle où elle se rencontre et interpréter cett bifurcation dans l'exemple cité.

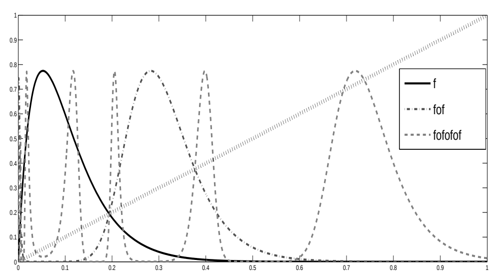

FIGURE 4 – Représentation graphique de f, fof et $fofof$.